Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y Metodológicos de la Educación Matemática

Grupo de Investigación:

Teoría y Métodos de Investigación en Educación Matemática

Dirección: Juan D. Godino

Granada, Octubre 2003

Dpto de Didáctica de la Matemática

Facultad de Ciencias de la Educación

18071 Granada

Dir. Electrónica: jgodino@ugr.es

http://www.ugr.es/local/jgodino/

Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y Metodológicos de la Educación Matemática

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

En esta colección de artículos incluimos diversas publicaciones que hemos realizado sobre cuestiones relativas a los fundamentos teóricos y metodológicos de la investigación en didáctica de las matemáticas. Estos trabajos son una parte de la documentación elaborada para los cursos de doctorado sobre Teoría de la Educación Matemática y Metodología de Investigación en Educación Matemática. Contienen reflexiones personales sobre la epistemología de la didáctica de las matemática, paradigmas y agendas de investigación y otras cuestiones relacionadas. Con el fin de facilitar el acceso a estos trabajos por parte de los estudiantes de doctorado e investigadores interesados los hemos incluido en esta Monografía. Recibiremos con sumo interés cualquier comentario y sugerencia que la lectura de estos artículos pudiera inducir en los lectores potenciales.

1

HACIA UNA TEORÍA DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA[1]

Juan D. GODINO

"Nada hay más práctico que una buena teoría" (Anónimo)

ÍNDICE

---
[1] En: A. Gutierrez (Ed.), *Área de Conocimiento: Didáctica de la Matemática.* (pp. 105-148) Madrid:Síntesis, 1991

1. INTRODUCCIÓN

La teoría del conocimiento es la parte de la filosofía que estudia la naturaleza, origen y valor del conocimiento. Se usa también la denominación de epistemología para esta disciplina, si bien algunos autores como Bunge (1985a) identifican la epistemología con la filosofía de la ciencia: "rama de la filosofía que estudia la investigación científica y su producto, el conocimiento científico".

El objetivo de este capítulo es analizar el estado actual, desde el punto de vista epistemológico, de la Didáctica de la Matemática, tratando de situarla en el contexto de las disciplinas científicas en general y de las ciencias de la educación en particular para tratar de dar una respuesta a preguntas como las siguientes: ¿Existen teorías específicas acerca de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, o son apropiadas y suficientes las teorías más generales de tipo psicopedagógico?; ¿los conocimientos didácticos son de naturaleza científica, tecnológica o técnica?. Se trata, pues, de una reflexión sobre el campo de la Didáctica de la Matemática en la línea sugerida por Kilpatrick (1985).

Componentes y relaciones de la Didáctica de la Matemática con otras disciplinas

Interesa, en primer lugar, realizar una clarificación terminológica. Si bien el término educación es más amplio que didáctica y, por tanto, se puede distinguir entre Educación Matemática y Didáctica de la Matemática, sin embargo, en el mundo anglosajón se emplea la expresión "Mathematics Education" para referirse al área de conocimiento que en Francia, Alemania, España, etc. se denomina Didáctica de la Matemática. En este trabajo tomaremos ambas denominaciones como sinónimas. También, las identifica Steiner (1985) para quien la Educación Matemática admite, además, una interpretación global dialéctica como disciplina científica y como sistema social interactivo que comprende teoría, desarrollo y práctica.

Steiner (1990) representa mediante el diagrama de la Figura 1 la disciplina Educación Matemática (EM) que está relacionada, formando parte de él, con otro sistema complejo social que llamaremos Sistema de Enseñanza de la Matemática (SEM) - denominado por Steiner "Educación Matemática y Enseñanza" -, representado en el diagrama por el círculo de trazo más grueso exterior a la EM. En dicho sistema se identifican subsistemas componentes como:

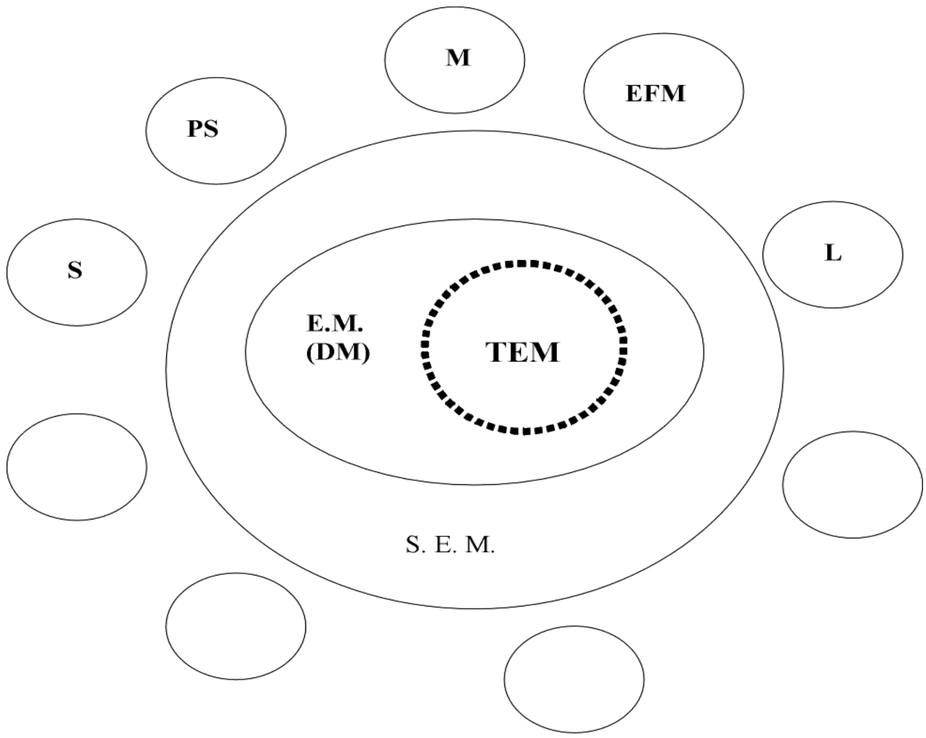
- La propia clase de matemáticas (CM)
- La formación de profesores (FP)
- Desarrollo del currículo (DC)
- La propia clase de matemáticas (CM)
- La propia Educación Matemática (EM), como una institución que forma parte del SEM.
- ...

La figura también representa las ciencias referenciales para la Educación Matemática tales como:

- Matemáticas (M)
- Epistemología y filosofía de las matemáticas (EFM) - Historia de las matemáticas (HM)
- Psicología (PS)
- Sociología (SO)
- Pedagogía (PE), etc.

En una nueva corona exterior Steiner sitúa todo el sistema social relacionado con la comunicación de las matemáticas, en el que identifica nuevas áreas de interés para la Educación Matemática, como la problemática del "nuevo aprendizaje en sociedad" (NAS) inducido por el uso de ordenadores como medio de enseñanza de ideas y destrezas matemáticas fuera del contexto escolar. También sitúa en esta esfera las cuestiones derivadas del estudio de las interrelaciones entre la Educación Matemática y la Educación en Ciencias Experimentales (ECE).

La actividad de teorización (TEM) es vista por Steiner como un componente de la Educación Matemática, y por ende del sistema más amplio que hemos denominado SEM que constituye el sistema de enseñanza de las matemáticas. La posición de TEM debería situarse en un plano exterior ya que debe contemplar y analizar en su totalidad el rico sistema global.



S.E.M: Sistema de enseñanza de las matemáticas (Formación de profesores, desarrollo curricular; materiales didácticos; evaluación, etc.)
E.M.: Educación matemática (o Didáctica de la Matemática)
TEM.: Teoría de la Educación Matemática
M: Matemáticas
EFM: Epistemología y Filosofía de las matemáticas
PS: Psicología
L: Lingüística
Etc.

Figura 1. *Relaciones de la Didáctica de la Matemática con otras disciplinas y sistemas (Steiner,1990)*

Otro modelo de las relaciones de la Educación Matemática con otras disciplinas es propuesto por Higginson (1980), quien considera a la matemática, psicología, sociología y filosofía como las cuatro disciplinas fundacionales de ésta. Visualiza la Educación Matemática en términos de las interacciones entre los distintos elementos del tetraedro cuyas caras son dichas cuatro disciplinas (Figura 2).

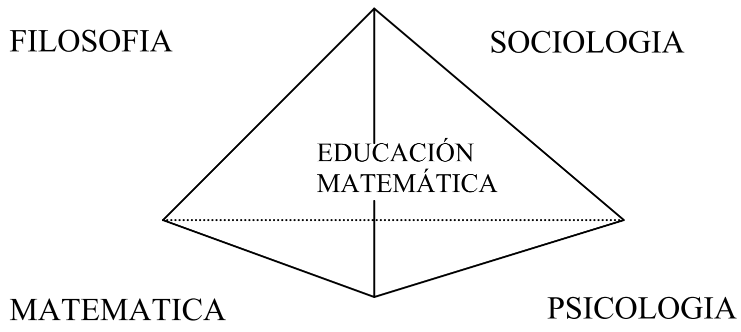


Figura 2. *Modelo tetraédrico de Higginson para la Educación Matemática*

Estas distintas dimensiones de la Educación Matemática asumen las preguntas básicas que se plantean en nuestro campo:

- qué enseñar (matemáticas)
- por qué (filosofía)
- a quién y donde (sociología)
- cuando y cómo (psicología)

En el trabajo citado Higginson describe, asimismo, las aplicaciones del modelo para clarificar aspectos tan fundamentales como:

- la comprensión de posturas tradicionales sobre la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas;
- la comprensión de las causas que han producido los cambios curriculares en el pasado y la previsión de los cambios futuros;
- el cambio de concepciones sobre la investigación y sobre la preparación de profesores.

Interés de la teorización en Didáctica

En segundo lugar, consideramos necesario adelantar unas palabras que predispongan al lector a favor de los planteamientos teóricos en un área de conocimiento de la que se espera que aporte con urgencia soluciones prácticas a los problemas cotidianos del profesor de matemáticas. La necesidad de construir teorías es evidente, ya que constituyen una guía para el planteamiento de problemas de investigación y para interpretar los resultados de las mismas (Wenzelburger, 1990). Un marco teórico permite sistematizar los conocimientos dentro de una disciplina, lo que constituye un primer paso para conseguir una visión clara de la unidad que pueda existir en nuestras percepciones. La teorización es un requisito para que un área de conocimiento alcance la categoría de científica y pueda desempeñar su papel explicativo y predictivo de fenómenos; puede decirse que la investigación científica significativa está siempre guiada por una teoría, aunque a veces lo sea de un modo implícito. El interés y necesidad de que los profesores cuenten con las teorías firmemente basadas en datos empíricos es, asimismo, resaltado por A. Orton (1988).

Como afirma Mosterín (1987, p. 146), "gracias a las teorías introducimos orden conceptual en el caos de un mundo confuso e informe, reducimos el cambio a fórmula, suministramos a la historia (que sin teoría correría el riesgo de perderse en la maraña de los datos) instrumentos de extrapolación y explicación y, en definitiva, entendemos y dominamos el mundo aunque sea con un entendimiento y un dominio siempre inseguros y problemáticos". Este mismo autor nos proporciona una sugestiva metáfora que nos ayuda a no atribuir a las teorías una verdadera realidad independiente de nosotros mismos: "Somos como las arañas, y las teorías son como las redes o telas de araña con que tratamos de captar y capturar el mundo. No hay que confundir estas redes o telas de araña con el mundo real, pero, sin ellas ¡cuanto más alejados estaríamos de poder captarlo y en último término, gozarlo!

La existencia de un Grupo de Trabajo con el nombre de "Teoría de la Educación Matemática", constituido en el V Congreso Internacional de Educación Matemática celebrado en Adelaida (Australia) en 1984, podría indicar que en este campo la teoría tiene ya una existencia clara y estabilizada. No es este el caso; a lo sumo podemos afirmar que existe un deseo y una necesidad, en una comunidad de investigadores, de que tal teoría sea posible. Lo que en la actualidad podemos encontrar, como es lógico en cualquier disciplina naciente, son diversas teorías parciales, inconexas, y más o menos dependientes de otras teorías generales de carácter psico-pedagógico; una parte importante de este capítulo (la sección 3) se dedica a la presentación de las corrientes de investigación más relevantes, materializadas en grupos existentes en la actualidad con una cierta cohesión en Didáctica de la Matemática.

La valoración del carácter científico de un campo de conocimiento no es una cuestión sencilla ya que existen distintas corrientes epistemológicas en teoría de la ciencia. Por este motivo, hemos creído necesario incluir una sección en la que hacemos una breve exposición de la noción de teoría y de sus tipos según su grado de generalidad. También presentamos unos conceptos básicos de tres concepciones epistemológicas que nos parecen relevantes para situar nuestro análisis de la Didáctica de la Matemática: las correspondientes a Kuhn, Lakatos y Bunge. El problema de la elección racional entre distintas teorías sobre unos mismos problemas básicos precisa de criterios epistemológicos, como se pone de manifiesto en el trabajo de R.E. Orton (1988). Este autor utiliza las ideas de Kuhn y Lakatos para comprender las diferencias entre dos teorías psicológicas - constructivismo y procesamiento de la información - en términos de su carácter más o menos progresivo y para estudiar la "inconmensurabilidad" de sus respectivas hipótesis.

2. EPISTEMOLOGÍA Y DIDÁCTICA

2.1. Teorías científicas y sus tipos

Con frecuencia el término teoría se aplica con distintos sentidos y grados de generalidad. El filósofo de la ciencia E. Nagel diferencia cuatro sentidos para el término teoría. En su significado más general, una teoría es un sistema de enunciados, frecuentemente universales y relativos a distintos aspectos de fenómenos complejos, capaces de explicar algunas regularidades empíricamente establecidas a partir de sucesos observados y, en muchos casos, de predecir con distintos grados de precisión cierta clase de ocurrencias individuales. Ejemplos de esta clase de teorías serían la mecánica de Newton, la teoría de la evolución, etc.

Un segundo sentido de teoría se refiere a "una ley o generalización que afirma alguna relación de dependencia entre variables" que puede adoptar una forma estrictamente universal o tener un alcance estadístico. Como ejemplo Nagel cita la ley de Boyle.

Una tercera acepción no se refiere a un conjunto de enunciados sistemáticamente integrados ni a una única generalización estrictamente formada, sino mas bien a la identificación de "una clase de factores o variables que por distintas razones se suponen constituyen los determinantes principales de los fenómenos que se investigan en una disciplina determinada. La teoría económica de Keynes se puede citar como ejemplo.

El cuarto sentido atribuido por Nagel a una teoría se refiere a cualquier análisis más o menos sistemático de un conjunto de conceptos relacionados. Este es el caso de la teoría del conocimiento en filosofía.

Burkhardt (1988) hace una distinción interesante entre las teorías que denomina fenomenológicas y teorías fundamentales. Las teorías fenomenológicas son las que surgen directamente de los datos, constituyendo un modelo descriptivo de una porción particular de fenómenos. Se caracterizan por el rango limitado de objetos a los que se aplican, pero son detalladas y específicas en sus descripciones y perdiciones, resultando con frecuencia de utilidad en el diseño del currículos y en la comprensión de los fenómenos que ocurren por su proximidad a la realidad.

Una teoría de tipo fundamental es una estructura conceptual de variables y relaciones entre ellas que comprende los aspectos esenciales de un conjunto de fenómenos. Tiene un carácter descriptivo y productivo y es completa dentro de un dominio bien delimitado. Se trata, por tanto, de modelos analíticos que tratan de explicar un rango amplio de fenómenos en términos de unos pocos conceptos básicos. Esta definición se ajusta a ciertos casos típicos de los campos de la física y biología, como la mecánica de Newton, la teoría genética de Mendel, etc. y coincide con el sentido más general atribuido por Nagel.

Para el caso de las ciencias humanas, Burkhardt se pregunta acerca de la naturaleza y alcance de teorías como el conductismo, constructivismo y teorías del desarrollo. Considera que aunque proporcionan estructuras para comprender los fenómenos, no son completas en un dominio limitado, y por tanto, deben ser usadas a sabiendas de que se presentan sin mecanismos establecidos para su integración fiable en un modelo predictivo. Las considera descripciones peligrosamente simples de sistemas complejos. En términos de las ciencias físicas no pueden considerarse como teorías ni incluso como modelos, sino como descripción de efectos - aspectos válidos de un sistema de conducta que es preciso tener en cuenta, pero que son cada una de ellas, en sí mismas, inadecuadas y engañosas.

Termina Burkhardt su reflexión sobre las teorías con una pregunta crucial para nuestro problema: ¿Existe alguna expectativa de una teoría fundamental de la Educación Matemática?. A pesar de que ve actualmente esta posibilidad como remota y no se considera capacitado para analizar los intentos actuales, personalmente intuimos el inicio de un camino en este sentido en los esfuerzos teóricos que se están llevando a cabo por la escuela francesa de Didáctica de la Matemática que expondremos en la Sección 2.3.

Componentes básicos en el proceso de construcción de teorías

La Figura 3 resume el proceso de construcción del conocimiento científico según Romberg (1988).

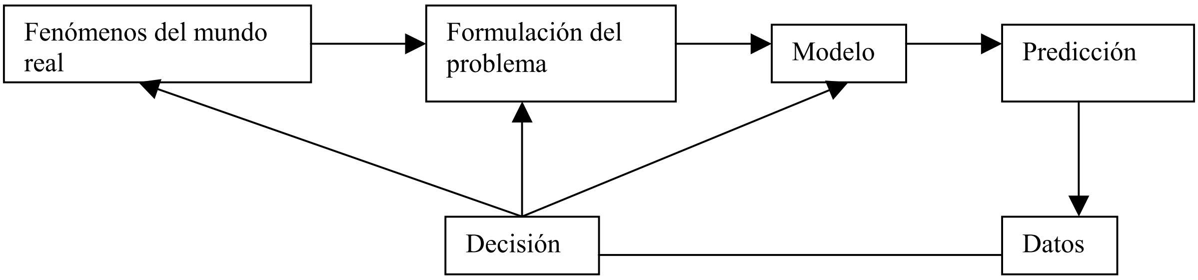


Figura 3. *Componentes en la construcción de teorías según Romberg*

La raíz del proceso de teorización está en los fenómenos del mundo real que interesa estudiar, en nuestro caso, los relativos a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en contextos escolares y sus interdependencias y relaciones con el sistema social. La formulación del problema implica la identificación de variables claves, usando un vocabulario y un conjunto de enunciados causales sobre el fenómeno. Estos enunciados se organizan con frecuencia en términos de modelos causales. Una predicción es un enunciado sobre los datos que se espera observar bajo las hipótesis de que el modelo sea verdadero. Estos datos pueden provenir de diseños experimentales en que se garantice el control de las variables o de observaciones naturalistas, y serán comparados con los resultados o hipótesis previstas. La naturaleza esencialmente estocástica de los fenómenos educativos obligará al empleo de métodos estadísticos para poder adoptar una decisión acerca de la concordancia de los datos con el modelo.

El esquema de Romberg corresponde básicamente al enfoque clásico o confirmatorio de la investigación, que ha estado generalmente asociado con los métodos cuantitativos. A veces la complejidad del problema hace necesario, una vez formulado éste y previamente a la construcción de un modelo, una toma de datos, que se analizan desde todas las perspectivas posibles en un enfoque exploratorio, buscando teorías que los expliquen. Generalmente este enfoque se emplea en la investigación cualitativa. Remitimos al lector al capítulo de este libro dedicado a los métodos de investigación para una descripción más detallada de los tipos y métodos de investigación.

2.2. Corrientes epistemológicas

El análisis del objeto y métodos de la Didáctica de la Matemática y su posible demarcación de otros campos de conocimiento (didáctica general, pedagogía, psicología, ...) es un tema propio de la epistemología. Como se ha indicado, esta rama de la filosofía estudia, precisamente, la constitución de los conocimientos científicos que se consideran válidos, abarcando los problemas de demarcación de la ciencia y el estudio del desarrollo del conocimiento científico.

Expondremos, brevemente, algunos aspectos de las concepciones epistemológicas de Kuhn, Lakatos, y Bunge que pueden servirnos de guía en nuestro esbozo de estudio del significado de la Didáctica de la Matemática. El lector interesado en estas cuestiones puede encontrar una síntesis asequible y más completa de las corrientes epistemológicas en Chalmers (1986), o en Benedito (1987) donde se aplica al estudio del estatuto epistemológico de la didáctica general.

Los paradigmas según Kuhn

Un rasgo característico de la teoría epistemológica defendida por Kuhn (1975) es la importancia que atribuye al carácter revolucionario del progreso científico, en el que una revolución supone el abandono de una estructura teórica y su reemplazo por otra, incompatible con la anterior.

La imagen que tiene Kuhn de cómo progresa una ciencia se puede resumir en el esquema de la Figura 4:

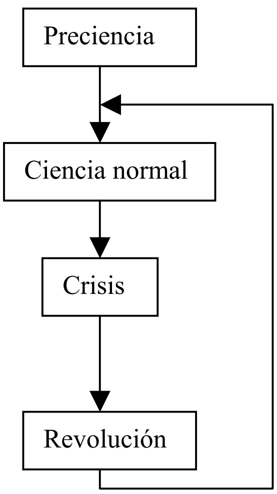


Figura 4. *Progreso de la ciencia (Kuhn)*

La noción que guía la aportación de Kuhn a la Teoría de la Ciencia es la de paradigma. Si bien en su obra principal "La estructura de las revoluciones científicas", incorpora hasta 22 usos distintos del término paradigma, la concepción predominante es el conjunto o red de hipótesis teóricas generales, leyes y técnicas para su aplicación, compartidas por los miembros de una comunidad científica, implicando una cierta coincidencia en sus juicios profesionales.

La formación de una ciencia se estructura finalmente cuando una comunidad científica se adhiere a un solo paradigma, pero va precedida por una fase de actividad relativamente desorganizada de preciencia inmadura en la que falta un acuerdo en aspectos fundamentales. Según Kuhn, la preciencia se caracteriza por el total desacuerdo y el constante debate de lo fundamental; habrá casi tantas teorías como investigadores haya en el campo y cada teórico se verá obligado a comenzar de nuevo y a justificar su propio enfoque.

Otro rasgo de la concepción epistemológica de Kuhn es el carácter de inconmensurables que atribuye a los paradigmas. Los científicos que comparten un cierto paradigma no pueden discutir las ideas de otro distinto de un modo imparcial y racional. Aunque una cierta teoría precursora pueda ser considerada como un caso especial de otra posterior, debe ser transformada de algún modo para poder ser comparada. Por ejemplo, los conceptos de "masa" y "energía" de la teoría de Newton deben cambiar su significado para que la teoría pueda ser comparada con la de Einstein.

Programas de investigación científica (Lakatos)

Lakatos (1975) considera que lo que debe ser valorado como científico no es una teoría aislada sino una sucesión de teorías enlazadas con un criterio de continuidad en programas de investigación. Estos programas contendrán reglas metodológicas acerca de las vías de investigación que deben ser evitadas (heurística negativa) y los caminos que deben seguirse (heurística positiva). Estas heurísticas proporcionan una definición implícita del marco conceptual del programa correspondiente, el cual incluirá:

- un núcleo firme o "centro firme" del programa;
- un cinturón protector de hipótesis auxiliares;
- la heurística, o conjunto de procedimientos aplicables a la solución de los problemas.

La diferenciación entre programas de investigación competitivos se hará teniendo en cuenta su potencial respectivo para descubrir nuevos fenómenos y el poder explicativo que proporcionen. Un nuevo programa de investigación supone un cambio progresivo de problemática, mientras que la degeneración de un programa viene dada por la proliferación de hechos contradictorios.

Lakatos considera que los programas de investigación pueden estar basados en hipótesis "inconmensurables", pero estas tendrán distintos "frutos" en cuanto a resultados científicos, y, en consecuencia, se pueden comparar sobre la base de su progreso relativo. Una teoría supondrá un progreso si cumple tres requisitos:

- la nueva teoría hace predicciones que no hacía su predecesora;
- algunas de estas nuevas predicciones se han podido corroborar;
- la nueva teoría puede explicar los hechos que no podía explicar su predecesora.

Aunque el "núcleo firme de una teoría" - por ejemplo, el desarrollo tiene lugar por etapas, en la teoría de Piaget - no se pueda con frecuencia contrastar, sin embargo, es posible determinar (al menos en principio) si un programa cumple los tres criterios de progresión, lo que permite evaluar la racionalidad del cambio científico.

Para Lakatos el estado de ciencia madura implica la existencia de un programa de investigación y el de ciencia inmadura una secuencia de ensayos y errores. El estado de ciencia normal (en el sentido de Kuhn) estaría caracterizado por la existencia de un programa de investigación que ha conseguido el monopolio. La historia de la ciencia debe ser la de los programas de investigación o paradigmas que compiten entre sí, y no debe convertirse en una sucesión de períodos de ciencia normal; cuanto antes comience la competencia, mejor para el progreso científico. El pluralismo teórico es preferible al monismo, siendo bueno que algunos investigadores se aferren a un programa de investigación hasta que alcance su punto de saturación.

Campos y líneas de investigación en la epistemología de Bunge

Para Bunge (1985b) la ciencia es un cuerpo creciente de conocimientos que se caracteriza como conocimiento racional, sistemático, exacto, verificable y por consiguiente falible. El conjunto de ideas establecidas provisionalmente forman el conocimiento científico. La investigación científica se puede realizar individualmente y sobre todo en el seno de comunidades científicas.

Para dicho autor un campo de conocimiento puede caracterizarse como un sector de la actividad humana dirigido a obtener, difundir o utilizar conocimientos de alguna clase. Las características que definen los campos de conocimiento las simboliza del siguiente modo:

$$C = \{C, S, D, G, F, E, P, A, O, M\}$$

cuyo significado es el siguiente:

- C : comunidad de científicos que cultivan C;
- S : sociedad;
- D : dominio o universo del discurso (los objetos de estudio);
- G : concepción general o filosofía inherente;
- F : fondo formal (conjunto de herramientas lógicas o matemáticas utilizables);
- E : fondo específico o conjunto de supuestos que toma de otros campos;
- P : problemática, o colección de problemas abordables;
- A : fondo específico de conocimientos acumulados;
- O : objetivos o metas;
- M : metódica o conjunto de métodos utilizables.

Distingue entre campos de creencias y de investigación. En los primeros (religiones, ideologías políticas, ...) el cambio en las ideas se produce sólo como consecuencia de presuntas revelaciones, de controversias o de presiones sociales. Los campos de investigación cambian incesantemente de resultas de la propia investigación, por el flujo permanente de los distintos proyectos de investigación.

Las tres primeras componentes de C, comunidad de investigadores, sociedad que los apoya y dominio de objetos que estudian constituyen el marco material de un campo de investigación, mientras que las restantes constituyen el marco conceptual.

Todo campo de investigación puede analizarse como un conjunto de líneas de investigación en proceso de diseño o de realización, en las cuales estará presente cada componente de C. Usando esta formalización se puede hablar de líneas de investigación complementarias, en competencia, originales, revolucionarias o contrarrevolucionarias.

Es de interés también para analizar el estatuto epistemológico de la Didáctica de la Matemática el estudio de las nociones de técnica y tecnología.

Como afirma Benedito (1987) la acción técnica es un modo de actuar empírico, artesanal y precientífico; es una combinación de experiencia (más o menos rutinaria), de tradición y de intuición. La tecnología es la técnica que emplea o se basa en el conocimiento científico. Bunge (1985b, p. 33) propone la siguiente definición de tecnología:

> *"...el vastísimo campo de la investigación, diseño y planificación que utiliza conocimientos científicos con el fin de controlar cosas o procesos naturales, de diseñar artefactos o procesos o de concebir operaciones de manera racional. En este sentido amplio, la medicina y la agronomía son biotecnologías, al par que las ciencia de la educación y de la administración son sociotecnologías".*

A modo de síntesis: Reflexiones sobre la Didáctica de la Matemática

De la exposición que hemos hecho sobre corrientes epistemológicas se desprende que las teorías científicas no pueden ser realizaciones individuales ni hechos aislados; debe haber una comunidad de personas entre las que exista un acuerdo, al menos implícito, sobre los problemas significativos de investigación y los procedimientos aceptables de plantearlos y resolverlos. Es preciso compaginar la autonomía personal en la elaboración de ideas y conceptos nuevos con la necesidad de que estas ideas sean contrastadas y compartidas. Las teorías son pues frutos o consecuencias de las líneas de investigación sostenidas por una comunidad mas o menos grande de especialistas en un campo determinado.

Romberg (1988), de acuerdo con los requisitos exigidos por Kuhn para que un campo de investigación se encuentre en el camino hacia la "ciencia normal", afirma que es necesario que se den las siguientes circunstancias:

1) Debe existir un grupo de investigadores con intereses comunes acerca de las interrelaciones existente entre distintos aspectos de un fenómeno complejo del mundo real. Por tanto, debe haber una cuestión central (o dominio) que guíe el trabajo de dicha comunidad particular de especialistas.

2) Las explicaciones dadas por la teoría deben ser enunciados sobre la causalidad, de modo que sea posible realizar predicciones acerca del fenómeno.

3) Los enunciados se hacen según un vocabulario y una sintaxis sobre la que el grupo está de acuerdo. Existen, además, unos procedimientos aceptados por el grupo de investigadores para probar los enunciados, esto es, para aceptar o rechazar las proposiciones. Los conceptos, proposiciones y teorías de las ciencias se distinguen de los constructos no científicos en que satisfacen los criterios marcados por las reglas del método científico y del razonamiento lógico y están aceptados por las comunidades científicas.

Nos parece muy sugestiva la metáfora usada por Romberg según la cual la construcción de una teoría requiere la combinación de distintos "ingredientes", como si se tratara de una receta para elaborar un pastel: cada elemento puede ser identificado independientemente, pero son necesarias unas condiciones adecuadas y una correcta combinación. Para el caso de la Teoría de la Educación Matemática los "ingredientes" que deben integrarse son: "Un grupo de investigadores interesados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en contextos escolares, que plantean predicciones de tipo causal, enunciados en un vocabulario compartido y que desean probar estas predicciones según procedimientos acordados" (p. 108)

Desde nuestro punto de vista, la exigencia de que exista una comunidad de especialistas que compartan una red de hipótesis y concepciones acerca del planteamiento de los problemas y de los métodos aceptables de resolución, esto es, un único paradigma en el sentido de Kuhn, nos parece demasiado fuerte. Como argumenta Shulman (1986), para el caso de las ciencias sociales y humanas y, por tanto, para la Educación Matemática, la coexistencia de escuelas competitivas de pensamiento puede verse como un estado natural y bastante maduro en estos campos ya que favorece el desarrollo de una variedad de estrategias de investigación y el enfoque de los problemas desde distintas perspectivas. La complejidad de los fenómenos puede precisar la coexistencia de distintos programas de investigación, cada uno sustentado por paradigmas diferentes, con frecuencia mezcla de los considerados como idóneos para otras disciplinas. El enfoque epistemológico de Bunge, con su concepción de haces de líneas de investigación competitivas en un campo científico, parece más apropiado para valorar el estado actual del campo de la Didáctica de la Matemática.

2.3. La didáctica de la matemática como disciplina científica

Al reflexionar sobre la posibilidad de construir un "área de conocimiento", que explique y sirva de fundamento a la comunicación y adquisición de los contenidos matemáticos, observamos que las didácticas especiales aparecen frecuentemente clasificadas como "capítulos" o enfoques diferenciales de la didáctica, negándoles el calificativo de ciencias de la educación propiamente dichas (Benedito, 1987, p. 91). De este modo, estos autores las reducen a meros conocimientos técnicos o a la sumo tecnológicos, ya que el saber científico pertenecería al ámbito de la didáctica (general) o a la psicología de la educación.

La interconexión entre la didáctica (general) y especiales puede clarificarse teniendo en cuenta el análisis que hace Bunge (1985a, p. 181) de la relación teoría general y teoría específica. Según explica este autor, una teoría general, como indica su nombre, concierne a todo un género de objetos, en tanto que una teoría específica se refiere a una de las especies de tal género. Por cada teoría general G hay entonces toda una clase de teorías especiales E , donde i es un número natural. Cada una de estas teorías especiales E_i contiene la teoría general G y, además, ciertas hipótesis subsidiarias S_{ij} que describen las peculiaridades de la especie i de objetos a que se refiere. Simbólicamente se puede representar,

$$E_i = G \cup \{S_{i1} , S_{i2} , ... S_{in} \}$$

donde n es el número de hipótesis subsidiarias que caracterizan a la teoría específica E_i con respecto a la general G.

Suele decirse que la teoría general "abarca" a cada una de las teorías específicas correspondientes, en el sentido de que éstas se obtienen con sólo agregarle a G ciertas premisas específicas. Pero, como Bunge afirma, es falso. Aunque se lea a menudo, que G contenga o implique a todas las teorías específicas E , mas bien es al revés. G se obtendría como la parte común (intersección) de todos los E . En otras palabras: dado un conjunto de teorías específicas, se puede extraer de éstas una teoría general con sólo suprimir todas las premisas particulares y dejar las suposiciones comunes a todas las teorías específicas.

Existen teorías generales del aprendizaje y teorías de la enseñanza. Pero, cabe preguntarse ¿aprendizaje de qué?; ¿enseñanza de qué?. Los fenómenos del aprendizaje y de la enseñanza se refieren a conocimientos particulares y posiblemente la explicación y predicción de estos fenómenos depende de la especificidad de los conocimientos enseñados, además de factores psico-pedagógicos, sociales y culturales. Esto es, los factores "saber a aprender" y "saber a enseñar" pueden implicar interacciones con los restantes, que obligue a cambiar sustancialmente la explicación de los fenómenos didácticos. La programación de la enseñanza, el desarrollo del currículo, la práctica de la Educación Matemática, precisa tener en cuenta esta especificidad.

La insuficiencia de las teorías didácticas generales lleva necesariamente a la superación de las mismas mediante la formulación de otras nuevas, más ajustadas a los fenómenos que se tratan de explicar y predecir. Incluso pueden surgir nuevos planteamientos, nuevas formulaciones más audaces que pueden revolucionar, por qué no, los cimientos de teorías establecidas.

El marco estrecho de las técnicas generales de instrucción (o incluso de la tecnología) no es apropiado para las teorías que se están construyendo por algunas líneas de investigación de la Didáctica de las Matemáticas. El matemático, reflexionando sobre los propios procesos de creación y comunicación de la matemática, se ha visto obligado a practicar el oficio de epistemólogo, psicólogo, sociólogo,... esto es, el oficio de didacta.

3. PRINCIPALES LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Una vez analizado el concepto de teoría, sus tipos y los requisitos que algunos autores exigen para que pueda hablarse de la existencia de una disciplina científica, nos preguntamos si para la Didáctica de la Matemática existe esa comunidad de investigadores en la cual pueda surgir uno o varios programas de investigación que produzca una teoría o teorías de la Educación Matemática. En el resto del Capítulo trataremos de describir el "estado de la cuestión" sobre esta problemática, centrándonos en la actividad desarrollada por los grandes núcleos de investigadores, en particular los grupos TME (Theory of Mathematics Education), PME (Psychology of Mathematics Education) y la escuela francesa de Didáctica de la Matemática.

3.1. El programa de investigación del grupo T.M.E.

En lo que respecta a la existencia de un grupo de investigación con intereses comunes en el desarrollo teórico, podemos decir que la intención del profesor Steiner en el V Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), celebrado en 1984, fue precisamente convocar a los científicos interesados en la gestación de una Teoría de la Educación Matemática. En dicho Congreso se incluyó un Área Temática con el nombre "Teoría de la Educación Matemática" a la que se dedicaron cuatro sesiones. Finalizado el Congreso se celebraron nuevas reuniones en las que quedó constituido un Grupo de Trabajo que se denominó TME (Theory of Mathematics Education) y en las que se continuaron las discusiones iniciadas en el ICME.

Las sucesivas conferencias de TME que se han celebrado han mostrado que existe una comunidad, al menos en estado incipiente, interesada por construir las bases teóricas de la Didáctica de la Matemática como ciencia, que está constituida por personas con formación e intereses en campos bastante diversificados: investigadores en Educación Matemática, matemáticos, profesores, psicólogos educativos, sociólogos educativos, formadores de profesores, etc.

En la configuración de esta comunidad científica existen intereses profesionales que han propiciado una orientación académica a esta actividad. Así, en Alemania, entre 1960 y 1975, se crearon mas de 100 cátedras en las escuelas de formación de profesores, asignadas a departamentos de matemáticas; al ser integradas las citadas escuelas en la universidad, la Didáctica de la Matemática se vio en cierta medida equiparada a las restantes disciplinas. En España este fenómeno ha tenido lugar especialmente a partir de 1985 con el reconocimiento de la Didáctica de la Matemática como área de conocimiento y la consiguiente posibilidad de constituir departamentos universitarios los profesores adscritos a dicha área.

Esta situación puede forzar a la Educación Matemática hacia un dominio de especulación científica relativamente desconectado de la realidad social. Steiner (1985), al analizar el papel que la Educación Matemática debería tener dentro de la universidad, propone que esta disciplina adopte una función de vínculo entre la matemática y la sociedad. "Esto es posible y necesario especialmente por medio de su contribución a la elaboración y actualización de muchas dimensiones olvidadas de las matemáticas: las dimensiones filosófica, histórica, humana, social y, comprendiendo a todas estas, la dimensión didáctica" (pág. 12).

Podemos hacer una primera aproximación al núcleo conceptual de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica analizando las cuestiones planteadas en el seno del Grupo TME que, dado su carácter abierto, ha reunido, en las sucesivas conferencias, a la mayoría de los investigadores en Educación Matemática interesados por el fundamento teórico de su actividad.

De acuerdo con el programa de desarrollo trazado en la Primera Conferencia (Steiner y cols, 1984), la "Teoría de la Educación Matemática" se ocupa de la situación actual y de las perspectivas para el desarrollo futuro de la Educación Matemática como un campo académico y como un dominio de interacción entre la investigación, el desarrollo y la práctica. En este programa se distinguen tres componentes interrelacionadas:

(A) La identificación y formulación de los problemas básicos en la orientación, fundamento, metodología y organización de la Educación Matemática como una disciplina, tales como:

1) La existencia de distintas definiciones, incluso discrepantes, de la Educación Matemática como disciplina.
2) El uso de modelos, paradigmas, teorías, y métodos en la investigación y de herramientas apropiadas para el análisis de sus resultados.
3) El papel que deben jugar los "macro-modelos", esto es marcos de referencia generales que relacionan significativamente los múltiples aspectos de la Educación Matemática y los micro-modelos, que proporcionan información detallada sobre áreas restringidas del aprendizaje matemático.
4) El debate entre "teorías específicas" frente a interdisciplinariedad y transdisciplinariedad.
5) Las relaciones entre la Educación Matemática y sus campos referenciales como matemáticas, pedagogía, psicología, sociología, epistemología, etc.
6) Las relaciones entre teoría, desarrollo y práctica: las tareas integradoras y sintéticas de la Educación Matemática frente a las tendencias recientes hacia una ciencia normal y la creciente especialización.
7) Los aspectos axiológicos éticos, sociales y políticos de la Educación Matemática.

(B) El desarrollo de una aproximación comprensiva a la Educación Matemática, que debe ser vista en su totalidad como un sistema interactivo, comprendiendo investigación, desarrollo y práctica. Esto lleva a destacar la importancia de la teoría de sistemas, especialmente de las teorías de los sistemas sociales, basadas en conceptos como interacción social, actividad cooperativa humana, diferenciación, subsistemas, autoreproducción y sistemas auto-organizados, auto-referencia y reflexión en sistemas sociales, etc.

Asimismo, interesa la identificación y el estudio de las múltiples interdependencias y mutuos condicionantes en la Educación Matemática, incluyendo el análisis de las complementariedades fundamentales.

(C) La organización de la investigación sobre la propia Educación Matemática como disciplina que, por una parte, proporcione información y datos sobre la situación, los problemas y las necesidades de la misma, teniendo en cuenta las diferencias nacionales y regionales y, por otra, contribuya al desarrollo de un meta-conocimiento y una actitud auto-reflexiva como base para el establecimiento y realización de los programas de desarrollo del TME.

La Segunda Conferencia del Grupo TME, celebrada en 1985 en el Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) de la Universidad de Bielefeld (Steiner y Vermandel, 1988), se centró sobre el tema genérico "Fundamento y metodología de la disciplina Educación Matemática (Didáctica de la Matemática)" y, por tanto, la mayoría de las contribuciones resaltaron el papel de la teoría y la teorización en dominios particulares. Entre estos temas figuran:

- teorías sobre la enseñanza;
- teoría de las situaciones didácticas;
- teoría interaccionista del aprendizaje y la enseñanza;
- el papel de las metáforas en teoría del desarrollo;
- el papel de las teorías empíricas en la enseñanza de la matemática;
- la importancia de las teorías fundamentales matemáticas;
- conceptos teóricos para la enseñanza de la matemática aplicada;
- la teoría de la representación como base para comprender el aprendizaje matemático;
- estudios históricos sobre el desarrollo teórico de la educación matemática como una disciplina.

Los grupos de trabajo se dedicaron a diferentes dominios de investigación con el fin de analizar el uso de modelos, métodos, teorías, paradigmas, etc.

El tema de trabajo de la Tercera Conferencia, celebrada en 1988 en Amberes (Bélgica) (Vermandel y Steiner, 1988) trató sobre el papel y las implicaciones de la investigación en Educación Matemática en y para la formación de los profesores, dado el desfase considerable existente entre la enseñanza y el aprendizaje. Concretamente las cuestiones seleccionadas fueron:

- El desfase entre enseñanza - aprendizaje en el proceso real en las clases de matemáticas como un fenómeno tradicional y como un problema presente crucial.
- El desfase ente investigación sobre la enseñanza e investigación sobre el aprendizaje.
- Modelos para el diseño de la enseñanza a la luz de la investigación sobre el aprendizaje.
- La necesidad de la teoría y la investigación en trabajos y proyectos de desarrollo y su posición en el contexto de investigación sobre enseñanza - aprendizaje.
- El papel del contenido, la orientación del área temática y las distintas perspectivas de las matemáticas en el estudio y solución del desfase investigación - aprendizaje y el desarrollo de modelos integradores.
- El desfase enseñanza - aprendizaje a la luz de los estudios sobre procesos e interacción social en la clase.
- Implicaciones del tema de la conferencia sobre la formación de profesores.
- El ordenador como una tercera componente en la interacción enseñanza-aprendizaje.

Los temas tratados en la cuarta Conferencia celebrada en Oaxtepec (México) en 1990 fueron los siguientes:

I) Relaciones entre las orientaciones teóricas y los métodos de investigación empírica en Educación Matemática.

II) El papel de los aspectos y acercamientos holísticos y sistémicos en Educación Matemática.

Asimismo, se inició en esta reunión la presentación de distintos programas de formación de investigadores en Educación Matemática en el seno de distintas universidades, tanto a nivel de doctorado como de "master". Un subgrupo de miembros del TME acordó recabar información sobre este tema, por medio de un cuestionario, a una amplia muestra de universidades de todo el mundo, como una primera fase en la constitución de una red de personas interesadas en el intercambio de información y discusión sobre el tema.

En la quinta Conferencia, celebrada en 1991 en Paderno del Grappa (Italia), se presentó un informe preliminar de resultados de la citada encuesta sobre formación de investigadores (Steiner y cols, 1991) y distintos trabajos sobre los temas siguientes:

I) El papel de las metáforas y metonimias en Matemáticas, Educación Matemática y en la clase de matemáticas.

II) Interacción social y desarrollo del conocimiento. Perspectiva de Vygotsky sobre la enseñanza y el aprendizaje matemático en la zona de construcción.

Como se ha expuesto, los fenómenos estudiados en las conferencias del TME incluyen un rango muy diverso: matemáticas, diseño de currículo, estudio de los modos de construcción por los alumnos del significado de las nociones matemáticas, las interacciones profesor - alumno, la preparación de los profesores, métodos alternativos de investigación, etc. La razón de esta diversidad se debe a que el término "Educación Matemática" no está aún claramente definido. No parece existir un consenso acerca de las cuestiones centrales para la Educación Matemática que agrupe todos los intereses aparentemente diversos del campo.

Si bien los temas tratados en las Conferencias TME son de interés para distintos aspectos de la Educación Matemática, no resulta fácil apreciar en ellos un avance en la configuración de una disciplina académica, esto es, una teoría de carácter fundamental que establezca los cimientos de una nueva ciencia por medio de la formulación de unos conceptos básicos y unos postulados elementales. Se encuentran muchos resultados parciales, apoyados en supuestos teóricos externos (tomados de otras disciplinas) que tratan de orientar la acción en el aula, aunque con un progreso escaso.

3.2. Enfoque psicológico de la educación matemática

La psicología de la educación es la rama de la psicología y de la pedagogía que estudia científicamente los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como de los problemas que en el contexto de los mismos puedan presentarse. Como afirma Gimeno Sacristán (1986,), son numerosas las posturas que consideran que la enseñanza es una técnica directamente derivada de una teoría psicológica del aprendizaje que le sirve de fundamento. "Esta situación de dependencia es claramente perjudicial para perfilar un campo teórico propio tanto para la Didáctica General como para las Didácticas Especiales, ya que las sitúa en un estado de colonización esterilizante en cuanto a la propia creación teórica". (Sacristán, 1986, p. 18)

La psicología de la educación "amenaza", pues, con acaparar el estudio de la conducta humana en las situaciones de enseñanza, reduciendo al máximo el ámbito de la Didáctica. Dentro de ella, una rama es la psicología de la instrucción, definida por Genovard y Gotzens (1990, p. 33) como la "disciplina científica y aplicada desarrollada a partir de la psicología de la educación, que estudia las variables psicológicas y su interacción con los componentes de los procesos de enseñanza - aprendizaje que imparten unos sujetos específicos que pretenden enseñar unos contenidos o destrezas concretas a otros individuos igualmente específicos y en un contexto determinado".

Estos autores analizan y clasifican diferentes teorías y modelos instruccionales desde una perspectiva interaccionista en tres tipos: interacción cognitiva, social y contextual. La interacción cognitiva, en la que sitúan las teorías de Piaget, Bruner y Ausubel, designa las teorías instruccionales que subrayan el hecho de que la instrucción es básicamente un intercambio de información, en su acepción más amplia, que se produce entre profesores y alumnos y que debe ejercerse en condiciones lo más óptimas posibles para que el objetivo principal, que el alumno consiga una asimilación de la información correcta, se realice. También se incluyen dentro del significado de este término las propuestas que destacan la interacción entre los contenidos instruccionales y los procesos y habilidades cognitivas del alumno y cuyo fin coincide igualmente con el que se acaba de citar. La perspectiva de interacción social, que da prioridad al papel de los sujetos que intervienen en la instrucción como facilitadores de los aprendizajes que deben desarrollarse tiene como representantes a Vygotsky y Bandura. Por último, Skinner, Gagné y Cronbach, entre otros, han propugnado teorías que pueden encuadrarse en la interacción contextual por la cual la instrucción es ante todo el producto de la interacción entre los sujetos y algunas de las variables del contexto.

Por motivos de extensión no nos detendremos en la presentación de estas teorías, por otro lado bien conocidas por los profesores a través de sus estudios psico-pedagógicos. Recomendamos al lector interesado en revisar estas y otras teorías y modelos instruccionales el texto citado de Genovard y Gotzens, así como el de A. Orton (1991) y Resnick y Ford (1984) para un estudio aplicado a la instrucción matemática.

El Grupo PME (Psychology of Mathematics Education)

En la comunidad internacional de investigadores en Educación Matemática, se aprecia también una fuerte presión de la perspectiva psicológica en el estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje matemático. Consideramos que este predominio del enfoque psicológico de la investigación no tiene en cuenta el necesario equilibrio y principio de complementariedad entre las cuatro disciplinas fundacionales de la Educación Matemática descritas por Higgison (1980). El citado predominio se manifiesta viendo la vitalidad del Grupo Internacional PME (Psychology of Mathematics Education), constituido en el Segundo Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) y que ha celebrado en 1991 su 15 Reunión Anual.

Los objetivos principales de este colectivo abierto de investigadores, tal como aparecen en sus estatutos, son:

- Promover contactos internacionales e intercambio de información científica sobre la Psicología de la Educación Matemática.
- Promover y estimular investigación interdisciplinar en este área con la cooperación de psicólogos, matemáticos y profesores de matemáticas.
- Fomentar una comprensión más profunda y correcta de los aspectos psicológicos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática y sus implicaciones.

Al preguntarse sobre cuáles son las cuestiones esenciales para la Educación Matemática para las cuales una aproximación psicológica puede ser apropiada, Vergnaud (1988) cita las siguientes:

- el análisis de la conducta de los estudiantes, de sus representaciones y de los fenómenos inconscientes que tienen lugar en sus mentes;
- las conductas, representaciones y fenómenos inconscientes de los profesores, padres y demás participantes.

De un modo más especial, analiza cuatro tipos de fenómenos cuyo estudio desde una aproximación psicológica puede ser fructífero:

1) La organización jerárquica de las competencias y concepciones de los estudiantes.
2) La evolución a corto plazo de las concepciones y competencias en el aula.
3) Las interacciones sociales y los fenómenos inconscientes.
4) La identificación de teoremas en acto, esquemas y símbolos.

Sin embargo, el análisis de las actas de las reuniones anuales del PME revela que los informes de investigación aceptados incluyen tanto investigaciones empíricas como teóricas y que cubren ámbitos no estrictamente psicológicos. No es posible detallar, por su amplitud, los temas tratados en las distintas Conferencias, pero si puede ser de interés citar el esquema de clasificación de los informes de investigación (research report) presentados en la última reunión (Furinghetti, 1991) ya que indica, a grandes rasgos, las cuestiones sobre los que se está trabajando en la actualidad. Dicho esquema indica en el cuadro 1.

1. Geometría y pensamiento espacial
2. Ordenadores y aprendizaje matemático
3. Pensamiento algebraico
4. Funciones
5. Pensamiento matemático avanzado
6. Fracciones, decimales, números racionales, razonamiento proporcional
7. Imágenes y visualización
8. Aprendizaje matemático en los primeros niveles
9. Demostración
10. Resolución de problemas
11. Concepciones de los alumnos, creencias, ...
12. Concepciones de los profesores, creencias, ...
13. Factores sociales y afectivos, metacognición
14. Construcción social del conocimiento matemático y lingüistica
15. Matemáticas fuera de la escuela, el papel del contexto
16. Evaluación
17. Cuestiones teóricas y epistemológicas
18. Materiales curriculares
19. Formación de profesores

Cuadro 1. *Clasificación de temas en la XV Conferencia PME*

Como afirma Balachef (1990a), más allá de la problemática psicológica inicial del grupo PME, el debate sobre la investigación ha puesto de manifiesto la necesidad de tener en cuenta nuevos aspectos, entre los que destaca:

1) La especificidad del conocimiento matemático. La investigación sobre el aprendizaje del álgebra, geometría, o el cálculo no se puede desarrollar sin un análisis epistemológico profundo de los conceptos considerados como nociones matemáticas. También se reconoce que el significado de los conceptos matemáticos se apoya no sólo sobre su definición formal sino, de un modo fundamental, sobre los procesos implicados en su funcionamiento. Por esta razón se pone el énfasis en el estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes en lugar de en sus destrezas o producciones actuales.
2) La dimensión social. Tanto el estatuto social del conocimiento que se debe aprender como el papel crucial de las interacciones sociales en el proceso de enseñanza requieren una consideración importante de la dimensión social en la investigación. Uno de los principales pasos en el desarrollo de la investigación en la Psicología de la Educación Matemática es el movimiento desde los estudios centrados en el niño hacia los estudios centrados en el estudiante como aprendiz en la clase. El estudiante es un niño implicado en un proceso de aprendizaje dentro de un entorno específico en el que las interacciones sociales con otros estudiantes y el profesor juega un papel crucial. Con esta evolución de la problemática, se debe desarrollar más investigaciones que utilicen observaciones sistemáticas de la clase o que precisen de la organización de procesos didácticos específicos.Tal investigación requiere nuevos útiles teóricos y metodológicos para producir resultados que sean robustos tanto teóricamente como también con respecto a su significado para propósitos prácticos.

Posiblemente esta apertura del campo de interés del PME lleve a Fischbein (1990) a afirmar que la Psicología de la Educación Matemática tiende a convertirse en el paradigma de la Educación Matemática en general (como cuerpo de conocimiento científico). Además, atribuye a esta línea de trabajo una entidad específica dentro de las áreas de conocimiento al considerar que la adopción de cuestiones, conceptos, teorías y metodologías del campo de la psicología general no ha dado los frutos esperados. La explicación que sugiere es que la psicología no es una disciplina deductiva, y por tanto, la mera aplicación de principios generales a un dominio particular no conduce usualmente a descubrimientos significativos. Incluso aquellos dominios de la psicología fuertemente relacionados con la Educación Matemática - como los estudios sobre la resolución de problemas, la memoria, estrategias de razonamiento, creatividad, representación, e imaginación - no pueden producir directamente sugerencias útiles y prácticas para la Educación Matemática y no pueden representar por sí mismas la fuente principal de problemas en este campo. Incluso la teoría de los estadios de Piaget y sus descubrimientos sobre el desarrollo de los conceptos matemáticos (número, espacio, azar, función, etc.) no pueden ser directamente trasladados en términos de currículo.

Esta observación no significa que la Educación Matemática debiera vivir y desarrollarse en una concha cerrada, opaca a las influencias externas. Las coordenadas psicológicas y sociológicas son prerrequisitos necesarios para definir problemas, trazar proyectos de investigación e interpretar los datos. No obstante, estos prerrequisitos son en sí mismos totalmente insuficientes.

La Educación Matemática, continúa explicando Fischbein, plantea sus propios problemas psicológicos, que un psicólogo profesional nunca encuentra en su propia área. Normalmente un psicólogo no se interesa por los tipos específicos de problemas de representación que aparecen en matemáticas - desde la representación gráfica de funciones y distintas clases de morfismos, a la dinámica del simbolismo matemático. Es extraño que un psicólogo cognitivo se interese y trate los problemas planteados por la comprensión del infinito matemático con todas sus distintas facetas y dificultades. Con el fin de poder afrontar estos problemas, se necesita un sistema particular de conceptos además de los generales inspirados por la psicología. Pero incluso los conceptos psicológicos usuales adquieren nuevo significado a la luz de las matemáticas y de la Educación Matemática.

Aprendizaje matemático y constructivismo

Dentro del enfoque psicológico, un problema esencial es la identificación de teorías acerca del aprendizaje matemático que aporten un fundamento sobre la enseñanza.

Romberg y Carpenter (1986) afirman que la investigación sobre aprendizaje proporciona relativamente poca luz sobre muchos de los problemas centrales de la instrucción y que gran cantidad de la investigación sobre enseñanza asume presupuestos implícitos sobre el aprendizaje infantil que no son consistentes con las actuales teorías cognitivas del aprendizaje. Se han tratado de aplicar teorías generales (fundamentales) sobre el aprendizaje para deducir principios que guíen la instrucción.

La instrucción basada en principios conductistas tiende a fragmentar el currículo en un número de partes aisladas que podrían aprenderse a través de un refuerzo apropiado. Pero la instrucción efectiva de las matemáticas necesita sustentarse en la comprensión de los conceptos matemáticos básicos.

En el caso de teorías del aprendizaje derivadas de la epistemología genética de Piaget, si bien la ejecución de tareas piagetianas está correlacionada con logros aritméticos, las operaciones lógicas no han suministrado una ayuda adecuada para explicar la capacidad del niño para aprender los conceptos y destrezas matemáticas más básicas.

De los estudios cognitivos se deduce uno de los supuestos básicos subyacentes de la investigación actual sobre aprendizaje. Consiste en aceptar que el niño construye, de un modo activo, el conocimiento a través de la interacción con el medio y la organización de sus propios constructos mentales. Aunque la instrucción afecta claramente a lo que el niño aprende, no determina tal aprendizaje. El niño no es un receptor pasivo del conocimiento; lo interpreta, lo estructura y lo asimila a la luz de sus propios esquemas mentales.

Como afirma Vergnaud (1990a) la mayoría de los psicólogos interesados hoy por la Educación Matemática son en algún sentido constructivistas. Piensan que las competencias y concepciones son construidas por los propios estudiantes. Según Kilpatrick (1987), el punto de vista constructivista implica dos principios:

1) El conocimiento es construido activamente por el sujeto que conoce, no es recibido pasivamente del entorno.
2) Llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el propio mundo experiencial; no se descubre un mundo independiente, preexistente, exterior a la mente del sujeto.

Pero el hecho de que la mayoría de los investigadores no especifiquen suficientemente las condiciones físicas y sociales bajo las cuales tiene lugar el conocimiento abre el camino a una amplia variedad de posiciones epistemológicas. Desde un constructivismo simple (trivial, para algunos) que solo reconocen el principio 1 mencionado, al constructivismo radical que acepta los dos principios y, por tanto, niega la posibilidad de la mente para reflejar aspectos objetivos de la realidad. También se habla de un constructivismo social, que refuerza el papel fundamental del conflicto cognitivo en la construcción de la objetividad. La solución epistemológica, afirma Vergnaud (1990a), es en principio bastante sencilla: La construcción del conocimiento consiste en la construcción progresiva de representaciones mentales, implícitas o explícitas, que son homomórficas a la realidad para algunos aspectos y no lo son para otros.

Aprendizaje matemático y procesamiento de la información

Como afirma Orton (1990), no existe ninguna teoría del aprendizaje de las matemáticas que incorpore todos los detalles que cabría esperar y que tenga una aceptación general. Según este autor se identifican en la actualidad dos corrientes de investigación sobre este campo: el enfoque constructivista, considerado anteriormente, y el enfoque de ciencia cognitiva - procesamiento de la información, de fuerte impacto en las investigaciones sobre el aprendizaje matemático, como se pone de manifiesto en el libro de Davis (1984).

Según Schoenfeld (1987) una hipótesis básica subyacente de los trabajos en ciencia cognitiva es que las estructuras mentales y los procesos cognitivos son extremadamente ricos y complejos, pero que tales estructuras pueden ser comprendidas y que esta comprensión ayudará a conocer mejor los modos en los que el pensamiento y el aprendizaje tienen lugar. El centro de interés es explicar aquello que produce el "pensamiento productivo", o sea las capacidades de resolver problemas significativos.

El campo de la ciencia cognitiva intenta capitalizar el potencial de la metáfora que asemeja el funcionamiento de la mente a un ordenador para comprender el funcionamiento de la cognición como procesamiento de la información, y como consecuencia comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se considera que el cerebro y la mente están vinculados como el ordenador y el programa.

El punto de vista dominante en ciencia cognitiva actual es que la cognición es llevada a cabo por un mecanismo de procesamiento central controlado por algún tipo de sistema ejecutivo que ayuda a la cognición a ser consciente de lo que está haciendo. Los modelos de la mente se equiparan a los modelos de ordenadores de propósito general con un procesador central capaz de almacenar y ejecutar secuencialmente programas escritos en un lenguaje de alto nivel. En estos modelos, la mente se considera como esencialmente unitaria, y las estructuras y operaciones mentales se consideran como invariantes para los distintos contenidos; se piensa que un mecanismo único está en la base de las capacidades de resolución de una cierta clase de problemas.

Desde el punto de vista metodológico, los científicos cognitivos hacen observaciones detalladas de los procesos de resolución de problemas por los individuos, buscan regularidades en sus conductas de resolución e intentan caracterizar dichas regularidades con suficiente precisión y detalle para que los estudiantes puedan tomar esas caracterizaciones como guías para la resolución de los problemas. Tratan de construir "modelos de proceso" de la comprensión de los estudiantes que serán puestos a prueba mediante programas de ordenador que simulan el comportamiento del resolutor.

Como educadores matemáticos debemos preguntarnos si la metáfora del ordenador proporciona un modelo de funcionamiento de la mente que pueda ser adecuada para explicar los procesos de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas y cuales son las consecuencias para la instrucción matemática de las teorías del procesamiento de la información.

Como nos advierte Kilpatrick (1985, p. 22) "Podemos usar la metáfora del ordenador sin caer prisioneros de ella. Debemos recordarnos a nosotros mismos que al caracterizar la educación como transmisión de información, corremos el riesgo de distorsionar nuestras tareas como profesores. Podemos usar la palabra información pero al mismo tiempo reconocer que hay varios tipos de ella y que algo se pierde cuando definimos los fines de la educación en términos de ganancia de información".

Como expondremos en la siguiente Sección, otros autores propugnan un enfoque diferente de los procesos de resolución de problemas y enseñanza-aprendizaje, que asignan un papel más activo al resolutor, tienen en cuenta las peculiaridades del contenido matemático así como el papel del profesor y de la interacción social en el aula.

3.3. Hacia una concepción matemática y autónoma de la didáctica

Dentro de la comunidad de investigadores que, desde diversas disciplinas, se interesan por los problemas relacionados con la Educación Matemática, se ha ido destacando en los últimos años, principalmente en Francia -donde sobresalen los nombres de Brousseau, Chevallard, Vergnaud, ...- un grupo que se esfuerza en una reflexión teórica sobre el objeto y los métodos de investigación específicos en Didáctica de la Matemática.

Fruto de este esfuerzo ha surgido una concepción llamada por sus autores "fundamental" de la Didáctica que presenta caracteres diferenciales respecto a otros enfoques: concepción global de la enseñanza, estrechamente ligada a la matemática y a teorías específicas de aprendizaje y búsqueda de paradigmas propios de investigación, en una postura integradora entre los métodos cuantitativos y cualitativos.

Como característica de esta línea puede citarse el interés por establecer un marco teórico original, desarrollando sus propios conceptos y métodos y considerando las situaciones de enseñanza - aprendizaje globalmente. Los modelos desarrollados comprenden las dimensiones epistemológicas, sociales y cognitivas y tratan de tener en cuenta la complejidad de las interacciones entre el saber, los alumnos y el profesor, dentro del contexto particular de la clase.

El estudio de las relaciones complejas entre la enseñanza y

aprendizaje, en aquellos aspectos que son específicos de las matemáticas, queda concretado por Laborde (1989) en estas dos cuestiones:

1) ¿Cómo podemos caracterizar las condiciones que deben implementarse en la enseñanza para facilitar un aprendizaje que reúna ciertas características fijadas a priori?
2) ¿Qué elementos debe poseer la descripción de un proceso de enseñanza para asegurar que pueda ser reproducido desde el punto de vista del aprendizaje que induce en los alumnos?

Un criterio básico que guía la investigación de estas cuestiones es la determinación del significado del conocimiento matemático que se desea, a priori, que construyan los alumnos y del que realmente alcanzan durante el proceso de enseñanza.

Como afirma Laborde (1989), existe un amplio consenso sobre el requisito metodológico de utilizar la experimentación en una interacción dialéctica con la teoría. El paradigma experimental es concebido dentro de un marco teórico y las observaciones experimentales son comparadas con el marco, pudiendo ser modificado éste a la luz de la consistencia de los conceptos desarrollados y la exhaustividad en relación a todos los fenómenos relevantes.

Concepción de la Didáctica de la Matemática; enfoque sistémico

En Brousseau (1989, p. 3) se define la concepción fundamental de la Didáctica de la Matemática como:

> *"una ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específicos de los mismos"*

indicando, como objetos particulares de estudio:

- las operaciones esenciales de la difusión de los conocimientos, las condiciones de esta difusión y las transformaciones que produce, tanto sobre los conocimientos como sobre sus utilizadores;
- las instituciones y las actividades que tienen por objeto facilitar estas operaciones.

Los didactas que comparten esta concepción de la Didáctica relacionan todos los aspectos de su actividad con las matemáticas. Se argumenta, para basar ese enfoque, que el estudio de las transformaciones de la matemática, bien sea desde el punto de vista de la investigación o de la enseñanza siempre ha formado parte de la actividad del matemático, de igual modo que la búsqueda de problemas y situaciones que requiera para su solución una noción matemática o un teorema.

Una característica importante de esta teoría, aunque no sea original ni exclusiva, es su consideración de los fenómenos de enseñanza - aprendizaje bajo el enfoque sistémico. Bajo esta perspectiva, el funcionamiento global de un hecho didáctico no puede ser explicado por el estudio separado de cada uno de sus componentes, de igual manera que ocurre con los fenómenos económicos o sociales.

Chevallard y Johsua (1982) describen El SISTEMA DIDÁCTICO en sentido estricto formado esencialmente por tres subsistemas: PROFESOR, ALUMNO y SABER ENSEÑADO. Además está el mundo exterior a la escuela, en el que se hallan la sociedad en general, los padres, los matemáticos, etc. Pero, entre los dos, debe considerarse una zona intermedia, la NOOSFERA, que, integrada al anterior, constituye con él el sistema didáctico en sentido amplio, y que es lugar, a la vez, de conflictos y transacciones por las que se realiza la articulación entre el sistema y su entorno. La noosfera es por tanto "la capa exterior que contiene todas las personas que en la sociedad piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza".

Brousseau (1986) considera, además, como componente el MEDIO que está formado por el subsistema sobre el cual actúa el alumno (materiales, juegos, situaciones didácticas, etc.).

Presentaremos, a continuación, una síntesis de los principales conceptos ligados a esta línea de investigación. Estos conceptos tratan de describir el funcionamiento del sistema de enseñanza - y de los sistemas didácticos en particular - como dependientes de ciertas restricciones y elecciones. Asimismo, tratan de identificar dichas restricciones y poner de manifiesto cómo distintas elecciones producen modos diferentes de aprendizaje desde el punto de vista de la construcción por los alumnos de los significados de las nociones enseñadas.

Aprendizaje y enseñanza: Teoría de Situaciones Didácticas

La teoría que estamos describiendo, en su formulación global, incorpora también una visión propia del aprendizaje matemático, aunque pueden identificarse planteamientos similares sobre aspectos parciales en otras teorías.

Se adopta una perspectiva piagetiana, en el sentido de que se postula que todo conocimiento se construye por interacción constante entre el sujeto y el objeto, pero se distingue de otras teorías constructivistas por su modo de afrontar las relaciones entre el alumno y el saber. Los contenidos son el substrato sobre el cual se va a desarrollar la jerarquización de estructuras mentales.

Pero además, el punto de vista didáctico imprime otro sentido al estudio de las relaciones entre los dos subsistemas (alumno - saber). El problema principal de investigación es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber pero con el fin de su optimización, de su control y de su reproducción en situaciones escolares. Esto obliga a conceder una importancia particular al objeto de la interacción entre los dos subsistemas, que es precisamente la situación - problema y la gestión por el profesor de esta interacción.

Como indica Balachef (1990a) se está reconociendo en los trabajos sobre Psicología de la Educación Matemática la importancia crucial que presentan las relaciones entre los aspectos situacionales, el contexto y la cultura y las conductas cognitivas de los alumnos. Esta dimensión situacional, que subyace - explícitamente o no - en cualquier estudio sobre procesos de enseñanza, raramente es considerada como objeto de investigación por sí misma. Pensamos que la Teoría de Situaciones

Didácticas de G. Brousseau es una iniciativa en este sentido.

Una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor con un fin de permitir a los alumnos aprender - esto es, reconstruir - algún conocimiento. Las situaciones son específicas del mismo.

Para que el alumno "construya" el conocimiento, es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. En este caso se dice que se ha conseguido la devolución de la situación al alumno.

El proceso de resolución del problema planteado se compara a un juego de estrategia o a un proceso de toma de decisiones. Existen diferentes estrategias, pero sólo algunas de ellas conducen a la solución del problema y a la construcción por el alumno del conocimiento necesario para hallar dicha solución. Este conocimiento es lo que se puede ganar, lo que está en juego, ("enjeu") en la situación. De este modo, la teoría de situaciones es una teoría de aprendizaje constructiva en la que el aprendizaje se produce mediante la resolución de problemas. Como teoría de resolución de problemas, asigna un papel crucial al resolutor. Comparada, por ejemplo a la Teoría del Procesamiemto de la Información que asimila el proceso de resolución con el funcionamiento de un ordenador, asigna al resolutor el papel de un decisor que desea hallar la estrategia ganadora y tiene la posibilidad de modificar su estrategia inicial una vez iniciado el proceso de solución.

Por otro lado, debido a la peculiar característica del conocimiento matemático que incluye, tanto conceptos, como sistemas de representación simbólica y procedimientos de desarrollo y validación de nuevas ideas matemáticas, es preciso contemplar varios tipos de situaciones:

- SITUACIONES DE ACCIÓN, sobre el medio, que favorecen el surgimiento de teorías (implícitas) que después funcionarán en la clase como modelos proto-matemáticos.
- SITUACIONES DE FORMULACIÓN, que favorecen la adquisición de modelos y lenguajes explícitos. En estas suelen diferenciarse las situaciones de comunicación que son las situaciones de formulación que tienen dimensiones sociales explícitas.
- SITUACIONES DE VALIDACIÓN, requieren de los alumnos la explicitación de pruebas y por tanto explicaciones de las teorías relacionadas y los medios que subyacen en los procesos de

demostración.

- SITUACIONES DE INSTITUCIONALIZACIÓN: que tiene por finalidad establecer y dar un "status" oficial a algún conocimiento aparecido durante la actividad de la clase. En particular se refiere al conocimiento, las representaciones simbólicas, etc, que deben ser retenidas para el trabajo posterior.

Los obstáculos y sus tipos

El aprendizaje por adaptación al medio, implica necesariamente rupturas cognitivas, acomodaciones, cambio de modelos implícitos (concepciones), de lenguajes, de sistemas cognitivos. Si se obliga a un alumno o a un grupo a una progresión paso a paso, el mismo principio de adaptación puede contrariar el rechazo, necesario, de un conocimiento inadecuado. Las ideas transitorias resisten y persisten. Estas rupturas pueden ser previstas por el estudio directo de las situaciones y por el indirecto de los comportamientos de los alumnos (Brousseau, 1983).

Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarles en conseguirlo. Brousseau (1983) da las siguientes características de los obstáculos:

- un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento;
- el alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia;
- cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigiría un punto de vista diferente;
- el alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber;
- después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica.

Se distinguen los siguientes tipos de obstáculos:

- OBSTÁCULOS ONTOGENÉTICOS - a veces llamados obstáculos psico genéticos: son debidos a las características del desarrollo del niño.
- OBSTÁCULOS DIDÁCTICOS: que resultan de las elecciones didácticas hecho para establecer la situación de enseñanza.
- OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS: intrínsecamente relacionados al propio concepto. Evidenciado por medio de un análisis histórico, tal tipo de obstáculo debe ser considerado como parte del significado del concepto. Por tanto, encontrarlo y superarlo, parece ser una condición necesaria para la construcción de una concepción relevante.

Observamos que, frente a la teoría psicológica que atribuye los errores de los alumnos a causas de tipo cognitivo, se admite aquí la posibilidad de que tales errores puedan ser debidos a causas epistemológicas y didácticas, por lo que la determinación de este tipo de causas proporciona una primera vía de solución.

Relación con el saber: Relatividad del conocimiento respecto de las instituciones

Recientemente, Chevallard (1989) ha adoptado una posición de notable generalidad para los estudios de Didáctica. Desde una perspectiva antropológica, la Didáctica de la Matemática sería el estudio del Hombre - las sociedades humanas - aprendiendo y enseñando matemáticas.

Para Chevallard (1989) el objeto principal de estudio de la Didáctica de la Matemática está constituido por los diferentes tipos de sistemas didácticos - formados por los subsistemas: enseñantes, alumnos y saber enseñado - que existan actualmente o que puedan ser creados, por ejemplo, mediante la organización de un tipo especial de enseñanza.

La problemática del estudio puede ser formulada, globalmente y a grandes rasgos, con la ayuda del concepto de relación con el saber (rapport au savoir) (institucional y personal). Para este autor, dado un objeto conceptual, "saber" o "conocer" dicho objeto no es un concepto absoluto, sino que depende de la institución en que se encuentra el sujeto. Así la expresión "sabe probabilidad", referida a una persona dada, puede ser cierta si nos referimos a las probabilidades estudiadas en la escuela y falsa si nos referimos al mundo académico, e incluso en éste habría que diferenciar si nos referimos al conocimiento necesario para la enseñanza en los primeros cursos de una carrera técnica o al que sería preciso para realizar investigación teórica sobre Cálculo de Probabilidades.

Hay que distinguir pues entre relación institucional (saber referido al objeto conceptual, que se considera aceptable dentro de una institución) y relación personal (conocimiento sobre el objeto de una persona dada) que puede estar o no en coincidencia con el institucional para la institución de la que forma parte. Sobre estos conceptos, se plantean dos preguntas fundamentales:

1) ¿Cuáles son las condiciones que aseguran la viabilidad didáctica de tal elemento del saber y de tal relación institucional y personal a este elemento del saber?
2) ¿Cuáles son las restricciones que pueden impedir satisfacer estas condiciones?

El problema central de la Didáctica es para este autor el estudio de la relación institucional con el saber, de sus condiciones y de sus efectos. El estudio de la relación personal es en la práctica fundamental, pero epistemológicamente secundario. Este programa, sin embargo, no puede tener éxito sin una toma en consideración del conjunto de condicionantes (cognitivos, culturales, sociales, inconscientes, fisiológicos, etc.) del alumno, que juegan o pueden jugar un papel en la formación de su relación personal con el objeto de saber en cuestión.

Transposición didáctica

La relatividad del saber a la institución en que se presenta lleva al concepto de transposición didáctica, (Chevallard, 1985), el cual se refiere a la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento para ser enseñado.

En una primera fase de la transposición se pasa del saber matemático al saber a enseñar. Se pasa de la descripción de los empleos de la noción a la descripción de la misma noción y la economía que supone para la organización del saber. La constitución de un texto para fines didácticos, reduce así la dialéctica, esencial al funcionamiento del concepto, de los problemas y los útiles matemáticos. Hay una descontextualización del concepto. También se asiste a un fenómeno de deshistorización, por el cual el saber toma el aspecto de una realidad ahistórica, intemporal, que se impone por si misma, que, no teniendo productor, no puede ser contestada en su origen, utilidad o pertinencia.

Una vez realizada la introducción del concepto, el funcionamiento didáctico va, progresivamente, a apoderarse de él para hacer "algo", que no tiene por qué tener relación con los móviles de quienes han concebido el programa. Su inmersión en el saber enseñado va a permitir finalmente su recontextualización. Pero ésta no conseguirá, en general, sobre todo en los primeros niveles de enseñanza, ni reconstituir el modo de existencia original de la noción, ni llenar todas y únicamente las funciones para las cuales se había decidido introducirlo.

Por ejemplo, y refiriéndonos el tema de la Probabilidad condicional, es frecuente en los textos de Bachillerato encontrar un nuevo concepto relacionado con ella que es inexistente en el Cálculo de Probabilidades a nivel académico. Nos referimos al denominado "suceso condicionado", del que pueden verse en numerosos textos definiciones similares a la siguiente:

"Al suceso consistente en que se cumpla B habiéndose cumplido A, se le llama suceso B condicionado a la verificación del suceso A y se escribe B/A"

Sin embargo, el álgebra de sucesos es siempre isomorfa a un álgebra de conjuntos y las únicas operaciones posibles en un álgebra de conjuntos son la usuales de unión, intersección y diferencia. El estudio de la transposición didáctica se preocupa, entre otras cuestiones, de detectar y analizar esta clase de diferencias y hallar las causas por las cuales se han producido, con objeto de subsanarlas y evitar que la enseñanza transmita significados inadecuados sobre los objetos matemáticos.

Otras nociones teóricas

Además de las nociones anteriores, otros conceptos teóricos de interés son los siguientes:

Contrato didáctico

El contrato didáctico es un conjunto de reglas - con frecuencia no enunciadas explícitamente - que organizan las relaciones entre el contenido enseñado, los alumnos y el profesor dentro de la clase de matemáticas (Brousseau, 1986).

Como ejemplo de este fenómeno se suele citar la investigación de Stella Baruk referida a la contestación de una amplia muestra de alumnos al problema denominado "la edad del capitán". Un enunciado típico de este problema es el siguiente:

Un barco mide 37 metros de largo y 5 de ancho.¿Cuál es la edad del capitán?

Preguntados sobre este problema, la mayoría de los niños en los primeros años escolares responde que 42 o 32 años. Si se cambia el enunciado, incluyendo otros datos o variando los números se da como respuesta un valor que pueda obtenerse mediante operaciones aritméticas con los datos del enunciado. Son muy pocos los casos de niños que contestan que no tiene sentido la pregunta.

El interés de esta noción se debe a que muchos estudiantes responden a una cuestión, no según un razonamiento matemático esperado, sino como consecuencia de un proceso de decodificación de las convenciones didácticas implícitas. Los estudios sobre el contrato didáctico y sus relaciones con los procesos de aprendizaje son esenciales ya que lo que está en juego es el significado real del conocimiento construido por los alumnos.

Campos conceptuales

Los conceptos matemáticos se dotan de significado a partir de una variedad de situaciones; cada situación no puede ser analizada usualmente con la ayuda de un solo concepto sino que precisa varios de ellos. Esta es la razón que ha llevado a Vergnaud (1990b) al estudio de la enseñanza y aprendizaje de campos conceptuales, esto es, grandes conjuntos de situaciones cuyo análisis y tratamiento requiere varios tipos de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están conectadas unas con otras. Como ejemplos de tales campos conceptuales pueden citarse las estructuras aditivas, estructuras multiplicativas, la lógica de clases y el álgebra elemental.

A estas nociones habría que añadir otras como las del juego de cuadros y dialéctica útil-objeto (Douady (1986)), Ingeniería didáctica

reproductibilidad (Artigue (1989)), etc. Por las necesidades de brevedad, remitimos al lector interesado a las referencias citadas. Algunas de las nociones mencionadas en esta Sección puede consultarlas el lector en el texto de esta colección de Centeno (1988).

Conclusión

La exposición sintética que hemos hecho de algunas de las nociones teóricas desarrollas por los didactas franceses - que comprende un colectivo de una centena de investigadores (Laborde, 1989) es una muestra de que, bajo nuestro punto de vista, la Escuela Francesa de Didáctica de la Matemática está en camino de constituir un "núcleo firme" de conceptos teóricos que sirva de soporte de un programa de investigación en el sentido de Lakatos. Su capacidad de plantear nuevos problemas de investigación, y de enfocar los problemas clásicos bajo una nueva luz, está siendo puesta de manifiesto a través de la producción científica de todo el colectivo de investigadores. Nociones como las de transposición didáctica, contrato didáctico, obstáculo, se utilizan cada vez con mayor frecuencia en las publicaciones en revistas y actas de congresos internacionales de la especialidad.

En todo caso, parece fuera de duda, que existe en Francia una línea de investigación (en el sentido de Bunge) dentro del campo de la Didáctica de la Matemática, con una problemática fuertemente original, como pone de manifiesto Balachef (1990), que puede significar una ruptura epistemológica para esta disciplina científica. Está por determinar si alcanzará o no el carácter de paradigma predominante (Kuhn) en un futuro más o menos lejano.

3.4. Otras teorías relevantes sobre Didáctica de la Matemática

Las investigaciones sobre la enseñanza y el currículo matemático constituyen un área de estudio en Didáctica de la Matemática de extraordinario interés. Para el mundo de la práctica el currículo y la instrucción son el centro de la acción ya que se orientan hacia necesidades vitales para mejorar los programas de la matemática escolar, planteándose, por tanto, cuestiones básicas para la investigación.

La investigación sobre currículo e instrucción, utilizando resultados de otros campos de la Educación Matemática - teorías del aprendizaje fundamentalmente - trata de ser una indagación sistemática para comprender o mejorar:

a) la selección y estructuración de las ideas matemáticas a enseñar;
b) la presentación de esas ideas a los alumnos;
c) la evaluación de la efectividad del programa y del rendimiento de los alumnos.

En síntesis, se interesa por comprender las combinaciones de contenido, secuenciación, estrategias y sistemas de impartición más efectivos para distintos perfiles de aptitudes de los alumnos.

Un estudio pormenorizado de este campo, que incluye la descripción de la problemática y una valoración de resultados, se puede encontrar en Fey (1980) y Romberg y Carpenter (1986). Asimismo, recomendamos el trabajo de Rico (1990).

Una característica de las investigaciones sobre el currículo y la enseñanza es su extraordinaria complejidad. Por ello, como indica Fey, los diseñadores de materiales curriculares o de procedimientos de instrucción, con frecuencia, basan sus esfuerzos en la creatividad personal, en juicios intuitivos y en la elaboración de tests informales. Se dispone de poca investigación que explique la dinámica del sistema que pudiese transformar la mezcla de necesidades, intereses y valores en un currículo científicamente fundamentado. Así, la selección de los temas de la matemática escolar, se determina por:

- la estructura interna de la disciplina, sin un análisis epistemológico riguroso;
- el interés público, medido de un modo informal;
- la recomendación de expertos prestigiosos;
- los libros de texto, elaborados a veces con escasa fundamentación científica.

En consecuencia, no parece existir todavía un fundamento teórico y experimental consistente para la investigación sobre el currículo y la instrucción. Entre las cuestiones importantes y estrategias para las investigaciones futuras, Fey (1980) citaba, precisamente, como tema prioritario la búsqueda de una teoría de la instrucción, o sea el diseño de modelos teóricos que relacionen las principales variables curriculares e instructivas.

El objetivo más perseguido en este campo ha sido el de buscar el mejor método de instrucción; pero ha sido improductivo en la identificación de procedimientos generales apropiados, secuenciación de estrategias o formas de presentación. En consecuencia, la investigación se está orientando hacia análisis más microscópicos del proceso curricular y hacia la búsqueda de los efectos que se esperan de una aproximación particular en situaciones y contenidos particulares. Este es el enfoque que se aprecia en la escuela francesa de didáctica de la matemática para las cuestiones curriculares.

Otras investigaciones sobre currículo e instrucción se han orientado hacia cuestiones generales, independientes de los contenidos particulares. Romberg y Carpenter (1986) afirman que la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza no han estado directamente relacionadas con las matemáticas y que los casos que han versado sobre este contenido se han centrado en mejorar la enseñanza de la matemática tradicional haciéndola más eficiente. Ahora bien, tales estudios se han basado en concepciones de la matemática y del aprendizaje ajenos a la perspectiva y resultados de las investigaciones cognitivas y, por tanto, sus hallazgos positivos podrían incluso ser irrelevantes o posiblemente perjudiciales.

Las ideas sobre el contenido que se enseña son ignoradas a menudo o se considera que están al margen del espectro de indagación en la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza. Romberg, Small y Carnaham (1979) localizaron cientos de estudios que valoraban la efectividad de casi todos los aspectos concebibles de la conducta docente, pero encontraron pocos modelos de instrucción que incluyeran la componente del contenido. Sin embargo, se reconoce la necesidad de acometer investigaciones que tengan en cuenta el contenido específico y las técnicas didácticas apropiadas para tal contenido. En general, los estudios llevados a cabo dentro del paradigma proceso - producto relacionados con la enseñanza de las matemáticas no han logrado dotar a los profesores de una lista de conductas examinables que les hiciera más competentes y les asegurase que sus alumnos aprendan. En cierto sentido, esta investigación refleja los estadios iniciales de lo que Kuhn (1969) denominó "la ruta de la ciencia normal". En ausencia de un paradigma o de un conjunto de principios organizativos, todos los hechos, que posiblemente atañesen a un área problemática, es posible que parezcan de igual relevancia.

Los estudios sobre enseñanza de las matemáticas hechos bajo un paradigma interpretativo, aunque son considerablemente menos numerosos que los positivistas, son interesantes ya que a través de diferentes lentes conceptuales se iluminan diversos aspectos de la enseñanza de la matemática. Como ejemplo puede citarse la línea de investigación sobre el pensamiento del profesor acerca de la Matemática y su enseñanza y el efecto de estas concepciones sobre su acción docente. Esta línea de trabajo está adquiriendo un interés creciente como puede verse en Llinares y Sánchez (1990).

Entre las teorías generales que se han proyectado sobre la Educación Matemática, y que sólo han sido mencionadas, destacamos el conductismo, el aprendizaje por descubrimiento (Bruner) y el aprendizaje significativo (Ausubel). La falta de espacio y el enfoque que hemos dado al Capítulo nos impide hacer una presentación con el detalle que requieren. Una síntesis de ellas, desde una perspectiva de la Didáctica de la Matemática, puede encontrarla el lector en el texto de Orton (1988), así como de la teoría del aprendizaje matemático de Dienes. Otra teoría relevante para la investigación didáctica es la de los niveles de razonamiento de Van Hiele que puede consultarse en Jaime y Gutiérrez (1990). Finalmente, no podemos dejar de resaltar la importancia del trabajo teórico de Freudenthal (1983) sobre la fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.

4. LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO SABER CIENTÍFICO, TECNOLÓGICO Y TÉCNICO

Disciplina autónoma, pluridisciplinariedad y transdisciplinariedad

Una vez descritas las principales corrientes de investigación dentro de la teoría de la Didáctica de la Matemática, en esta Sección trataremos de realizar una reflexión final acerca de la naturaleza de este campo como área de conocimiento. ¿Se trata de un saber meramente práctico, una tecnología fundada y dependiente de otras ciencias, o, por el contrario, existen problemas cuyas características requieren un nivel de análisis teórico y una metodología propias de un verdadero saber científico?

Esta reflexión epistemológica, que es esencial para orientar adecuadamente la investigación didáctica, ya que condiciona la formulación de las cuestiones centrales de la misma (Godino, 1990), apenas ha sido tratada en la bibliografía. Destaca, sin embargo, el trabajo de Brousseau (1989) con el significativo título "La tour de Babel" y las ideas de Steiner, que a continuación exponemos.

Ante la extrema complejidad de los problemas de la Educación Matemática, Steiner (1985) indica que se producen dos reacciones extremas:

- los que afirman que la Didáctica de la Matemática no puede llegar a ser un campo con fundamentación científica y, por tanto, la enseñanza de la matemática es esencialmente un arte;
- los que, pensando que es posible la existencia de la Didáctica como ciencia, reducen la complejidad de los problemas seleccionando sólo un aspecto parcial (análisis del contenido, construcción del currículo, métodos de enseñanza, desarrollo de destrezas en el alumno, interacción en el aula,...) al que atribuyen un peso especial dentro del conjunto, dando lugar a diferentes definiciones y visiones de la misma.

De manera parecida se expresa Brousseau (1989) indicando una primera acepción de la Didáctica de la Matemática, que consiste en la identificación de la didáctica como el ARTE DE ENSEÑAR - conjunto de medios y procedimientos que tienden a hacer conocer, en nuestro caso, la matemática.

Brousseau (1989), sin embargo, distingue dos concepciones de carácter científico que denominaremos concepción PLURIDISCIPLINAR APLICADA y concepción AUTÓNOMA (calificada por Brousseau como FUNDAMENTAL O MATEMÁTICA). Como bisagra entre estos dos grupos se distingue también una concepción TECNICISTA, para la que la didáctica serían las técnicas de enseñanza, "la invención, descripción, estudio, producción y el control de medios nuevos para la enseñanza: currícula, objetivos, medios de evaluación, materiales, manuales, logiciales, obras para la formación, etc."

En el punto de vista que hemos denominado concepción PLURIDISCIPLINAR de la didáctica, que coincidiría con la segunda tendencia señalada por Steiner, ésta aparece como una etiqueta cómoda para designar las enseñanzas necesarias para la formación técnica y profesional de los profesores. La Didáctica como área de conocimiento científico sería "el campo de investigación llevado a cabo sobre la enseñanza en el cuadro de disciplinas científicas clásicas", como son: la psicología, la semiótica, sociología, lingüística, epistemología, lógica, neurofisiología, pedagogía, pediatría, psicoanálisis, ... En este caso, la naturaleza del conocimiento didáctico sería el de una tecnología fundada en otras ciencias.

La concepción autónoma tiende a integrar todos los sentidos precedentes y a asignarles un lugar en relación a una teoría unificadora del hecho didáctico, cuya fundamentación y métodos serían específicos, pretendiendo una justificación endógena. Dicha concepción pudiera ser el comienzo de una respuesta a la necesidad señalada por Steiner "de una base teórica que nos permita una mejor comprensión e identifique las diversas posiciones, aspectos e intenciones que subrayan las diferentes definiciones de Educación Matemática en uso, para analizar las relaciones entre estas posiciones y conjuntarlas en una comprensión dialéctica del campo total". (Steiner, 1985, pág.11).

En la escuela francesa de Didáctica se observa una aspiración de construir un área de estudio científico propio que no esté encorsetado y dependiente del desarrollo de otros campos científicos, no siempre consistentes. Contrasta este objetivo con la postura de Steiner quien no es partidario de insistir en la búsqueda de teorías internas (home-theories) ya que ve en ellas un peligro de restricciones inadecuadas. La naturaleza del tema y sus problemas reclama una aproximación interdisciplinar y considera erróneo no hacer un uso significativo del conocimiento que otras disciplinas ya han producido sobre aspectos específicos de aquellos problemas.

En el trabajo ya citado, Steiner afirma que la Educación Matemática debe tender hacia lo que Piaget llama transdisciplinariedad, que cubriría no solo las interacciones o reciprocidades entre proyectos de investigación especializados, sino que situaría estas relaciones dentro de un sistema total sin límites fijos entre disciplinas.

Conexión teoría-práctica

Brousseau (1988) analiza la relación que puede existir entre su concepción de la Didáctica de la Matemática, como teoría fundamental de la comunicación de los conocimientos matemáticos, frente a otras perspectivas y orientaciones, afirmando que no hay ninguna incompatibilidad. Por el contrario, es una concepción que favorece la integración de aportaciones de otros dominios y su aplicación a la enseñanza, y que establece con la práctica una relación sana de ciencia a técnica y no de prescripción a reproducción.

No condena, a priori, ninguna acción en favor de la enseñanza. Pero es preciso comprender que es un error querer a toda costa obligar a la didáctica a comprometerse en cada una de estas acciones y a jugar un papel que no le corresponde. En el mejor de los casos, se le proponen desafíos que no se osaría exigir a ciencias que están, sin embargo, mucho más avanzadas. En el peor de los casos, se corre el riesgo de confiar a sus expertos responsabilidades por encima de sus fuerzas y de reproducir errores semejantes a los que se han visto en otras partes (por ejemplo, en economía, ...). Como se afirma en Godino (1990), la mejora efectiva de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas depende del funcionamiento óptimo de otros elementos, ajenos a la propia investigación didáctica, condicionantes de la toma de decisiones en el sistema didáctico. Particularmente, dada la influencia sobre las decisiones del profesor en el aula de factores como las directrices curriculares, los procedimientos de evaluación externa, la difusión de materiales didácticos, etc., se considera imprescindible facilitar la intercomunicación de los agentes responsables de ellos con los investigadores, así como la potenciación de la investigación didáctica.

De esta investigación didáctica, entendida bajo una perspectiva científica, no podemos esperar la producción de situaciones didácticas modélicas que el profesor debe imitar, "pero es razonable pensar que el desarrollo de la investigación proporcionará algún conocimiento que capacitará a los profesores para afrontar el problema didáctico difícil de conducir la vida de esta sociedad cognitiva original: la clase de matemáticas" (Balacheff, 1990b, p. 7)

Conclusión

En este Capítulo hemos efectuado un análisis del estado actual del desarrollo teórico de la Didáctica de la Matemática, particularmente de las grandes corrientes o líneas de investigación actuales. El propósito perseguido ha sido la clarificación del papel de este área de conocimiento en el panorama de la ciencia y de la técnica y de sus conexiones con otras disciplinas. También, nos hemos preguntado sobre la consideración de la Didáctica de la Matemática como campo de conocimiento pluridisciplinar o autónomo y el carácter científico - técnico del mismo.

Sobre esta última problemática, coincidimos con el análisis efectuado por Benedito (1987), quien tras el resumen que presenta de las distintas concepciones epistemológicas, otorga a la didáctica general un triple carácter: científico, tecnológico y práctico. Coincidimos con este autor y consideramos que su análisis es aplicable también para la Didáctica de la Matemática, que no puede quedar relegado como un apéndice técnico de teorías más generales.

Las características de la misma se pueden desglosar, como hace el autor citado para la didáctica general, en los aspectos indicados en el cuadro 2.

Por otro lado, nuestra búsqueda de una teoría de carácter fundamental en el sentido de Burkhart (sección 2.1), con aceptación general para explicar y predecir el conjunto de fenómenos de los procesos de enseñanza-aprendizaje matemático, ha sido infructuosa. El estado de la Didáctica de la Matemática puede definirse como el de un campo de investigación científico- tecnológico emergente en el que se identifican un cúmulo de teorías competitivas, expresadas generalmente de un modo informal y dependientes especialmente de planteamientos psicológicos. Sin embargo, el número y calidad creciente de las investigaciones en el área nos hacen ser optimistas sobre la consolidación de nuestra disciplina como campo autónomo de conocimiento en un futuro no muy lejano.

COMO SABER CIENTÍFICO:
- Recibe aportaciones de otras ciencias. - Intenta elaborar teorías descriptivas, explicativas o axiomáticas de menor a mayor formalización, a partir de los resultados de la investigación. - Se proyecta sobre la tecnología. - Utiliza el método científico.
COMO SABER TECNOLÓGICO:
- Es una actividad científicamente fundada, es decir, una ciencia aplicada que se inspira en el conocimiento científico. - Utiliza el método científico y el método tecnológico, en el sentido de Bunge. - Se apoya en modelos y diseños progresivamente rigurosos y adecuados a la idiosincrasia de la didáctica, con evaluación de resultados. - Está en continua interacción con la práctica.
COMO HACER TÉCNICO:
- Se nutre, o se ha de nutrir, de las normas, leyes o reglas derivadas del saber científico y del tecnológico. - Adapta la norma con flexibilidad a cada caso particular y no al revés. - Es punto de partida de nuevos enfoques, revisiones e investigaciones destinados a mejorar el saber tecnológico y el científico.

Cuadro 2. *Característica de la didáctica (Benedito, 1987)*

Agradecimientos

Agradezco las sugerencias y correcciones sobre este trabajo que he recibido de A. Gutiérrez (Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia), E. Wenzelburger (Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM (México)), M.L. Oliveras y M.C. Batanero (Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada).

REFERENCIAS

Artigue, M. (1989). Ingenierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 9, n. 3, pp. 281-308.

Balacheff, N. (1990a). Future perspectives for research in the psychology of mathematics education. En: P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.

Balacheff, N. (1990b). Beyond a psychological approch: the Psychology of Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics,* 10, 3, p. 2-8.

Balacheff, N. (1990c). Towards a problématique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 21, n. 4, pp. 258-272.

Benedito, V. (1987). *Introducción a la Didáctica. Fundamentación teórica y diseño curricular*. Barcelona: Barcanova.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problémes en mathematiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 4, n. 2, pp. 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n. 2, pp. 33-115.

Brousseau, G. (1988). Utilité et interet de la didactique pour un professor de college. *Petit x*, n. 21, pp.47 - 68. [Traducción castellana en la revista Suma, n. 4 y 5].

Brousseau, G. (1989). La tour de Babel. Etudes en Didactique des Mathématiques. *Article occasionnel n. 2. IREM de Bordeaux*.

Bunge, M. (1985a). *Epistemología*. Barcelona: Ariel.

Bunge, M. (1985b). *Pseudociencia e ideología*. Madrid: Alianza.

Burkhardt, H. (1988). The roles of theory in a 'sistems' approach to mathematical education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, n.5, pp. 174-177.

Centeno, J. (1988). *Números decimales*. (Nº 5 Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje). Madrid: Síntesis.

Chalmers, A.F. (1986) *¿Qué es esa cosa llamada ciencia?.* Madrid: Siglo XXI.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1989) Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Actas del Seminario de Grenoble. IREM Université de Grenoble*.

Chevallard, Y. y Johsua, M.A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 3, n. 1, pp. 159-239.

Davis, R.B. (1984). *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education*. London: Croom Helm.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n. 2, pp. 5-31.

Fey, J.T. (1980). Mathematics education research on curriculum and instruction. En: R.J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*. Reston, VA: N.C.T.M.

Fischbein, E. (1990). Introdution (Mathematics and Cognition). En: P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Furinghetti, F. (Ed.) (1991). *International Group for the Psychology of Mathematics Education. Proceeding Fifteenth PME Conference.* Dipartamento di Matematica dell'Universitá di Genova. Italia.

Genovard, C. y Gotzens, C. (1990). *Psicología de la instrucción*. Madrid: Santillana.

Gimeno Sacristán, J. (1986). *Teoría de la enseñanza y desarrollo del curriculo*. Madrid: Anaya.

Godino, J. D. (1990). Concepciones, problemas y paradigmas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Sevilla: Soc. Thales.

Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 1, n.2 pp. 3-7.

Kilpatrick, J. (1985). Reflection and recursion. *Educational Studies in Mathematics*, pp. 1-26.

Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. *Proc. 11th Conference PME*. Montreal, p. 3-23.

Kuhn, T.S. (1975). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: F.C.E.

Laborde, C. (1989). Audacity and reason: French research in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, n. 3, pp. 31-36.

Lakatos, I. y Musgrave, A. (1975). *La crítica y el desarrollo del conocimiento*. Barcelona: Grijalbo.

Llinares, S. y Sanchez, M.V. (1990). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las matemáticas. En: S. Llinares y M.V. Sanchez (Eds), *Teoría y práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar.

Mosterín, J. (1987). *Conceptos y teorías en la ciencia*. Madrid: Alianza Universidad.

Orton, A. (1988). *Learning mathematics. Issues, theory and classroom practica*. London: Cassel. [Traducción castellana: "Didáctica de las Matemáticas". Madrid: MEC y Morata, 1990].

Orton, R.E. (1988). Two theories of "theory" in Mathematics Education: using Kuhn and Lakatos to examine four foundational issues. *For the Learning of Mathematics* Vol. 8, n. 2, pp. 36-43.

Resnick, L.B. y Ford, W.W. (1984). *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale, N.J.: LEA. [Traducción castellana: "La enseñanza de las matemáticas y su fundamento psicológico. Barcelona: Paidos-MEC, 1990].

Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática. Una perspectiva cultural. En: S. Llinares y M.V. Sanchez (Eds), *Teoría y práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar.

Romberg, T. (1988). Necessary ingredients for a Theory of Mathematics Education. En: H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds), *Fondations and Methodology of the discipline Mathematics Education. Procceding 2nd TME*- Conference. Bielefeld - Antwerp: Dept of Didactics and Criticism Antwerp Univ. & IDM.

Romberg, T. y Carpenter, T. P. (1986). Research on teaching and learning mathematics: two disciplines of scientific inquiry. En M.C. Wittock (Ed.) *Handbook of research on teaching*. London: Macmillan.

Schoenfeld, A.H. (1987). Cognitive science and mathematics education: an overview. En A. H. Schoenfel (Ed.), *Cognitive science and mahtematics education*. London: LEA, p. 1-32.

Shulman, L.S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: a contemporary perspective. En M.C. Wittrock (Ed.) *Handbook of research on teaching*. London: Macmillan. [Traducción castellana en: La investigación de la enseñanza, I, Paidós-MEC, 1989].

Stanic, G.M.A. (1988). A response to professor Steiner's "Theory of Mathematics Education". En: H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds), *Fondations and Methodology of the discipline Mathematics Education. Procceding 2nd TME-Conference*. Bielefeld - Antwerp.

Steiner, H.G. (1984); Balacheff, N. y otros. (Eds.) *Theory of mathematics education (TME). ICME 5*. Occasional paper 54. Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Steiner, H.G. (1985). Theory of mathematics education (TME): an introduction. *For the Learning of Mathematics*, Vol 5. n. 2, pp. 11-17.

Steiner, H.G.; Vermandel, A. (Eds) (1988). *Foundations and methodology of the discipline Mathematics Education (Didactics of Mathematics).* Proc. 2nd TME Conference. Antwerp and Bielefeld: Dpt of Didactics and Criticism Antwerp Univ. and IDM.

Steiner, H.G. (1990). Needed cooperation between science education and mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* n. 6, pp. 194-197.

Steiner, G.H.; Batanero, M.C.; Godino, J.D. y Wenzelburger, E. (1991). Preparation of researchers in mathematics education: an international survey (preliminary report). *5-TME Conference*, Paderno del Grappa (Italia)

Vergnaud, G. (1988). Why is psychology essential? Under which conditions?. En: H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds), *Fondations and Methodology of the discipline Mathematics Education. Procceding 2nd TME- Conference*. Bielefeld - Antwerp.

Vergnaud, G. (1990a). Epistemology and psychology of mathematics education. En: P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.

Vergnaud, G. (1990b). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 10, n. 2,3, pp. 133-170.

Vermandel, A.; Steiner, H:G.(Eds) (1988). *Investigating and bridging the teaching-learning gap. Proc. 3rd TME Conference*. Antwerp: Dept of Didactics and Criticism Antwerp Univ.

Wenzelburger, E. (1990). Teoría e investigación en Educación Matemática. 4 Conferencia TME. Oaxtepec (México).

2

PARADIGMAS, PROBLEMAS Y METODOLOGÍAS DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA[1]

Juan D. GODINO

Resumen

En este trabajo se analizan diferentes concepciones de la Didáctica de la Matemática como disciplina y de los paradigmas de investigación adecuados a la misma. Estos dos factores determinan la definición de los problemas de investigación y constituyen componentes principales de la Teoría de la Educación Matemática, junto con la perspectiva sistémica, cuya consideración es inevitable dada la complejidad de los sistemas didácticos y de enseñanza. Finalmente, describimos la concepción y paradigma de investigación de Didáctica de la Matemática surgida en Francia, que consideramos integradora respecto al resto de enfoques pluridisciplinar y técnico de esta disciplina, así como respecto a los marcos metodológicos extremos interpretativo y proceso-producto.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las fases más importantes del proceso de investigación es sin duda el planteamiento del problema objeto de estudio. Las primeras cinco etapas de este proceso descritas por Fox (1981) se refieren a esta cuestión:

1) Idea o necesidad impulsora y área problemática.
2) Examen inicial de la bibliografía.
3) Definición del problema concreto de investigación
4) Estimación del éxito potencial de la investigación planteada

[1] *Quadrante*, 2 (1), pp. 9-22, 1993

5) Segundo examen de la bibliografía.

Si esta fase de la investigación nos conduce a un problema significativo para el área de conocimiento y disponemos de los recursos necesarios para llevarla a cabo con el necesario rigor metodológico, se habrá cubierto una parte importante del trabajo de investigación.

No obstante, esta etapa es, frecuentemente, una de las más difíciles. ¿Es posible disponer de una relación de cuestiones, convenientemente clasificadas y jerarquizadas que, en función de los recursos disponibles, nos facilite la delimitación de los problemas de investigación? Esta cuestión ha merecido la atención de autores como Freudenthal (1981), Wheeler et al. (1984), entre otros, y ha motivado la producción de distintas agendas de investigación para la didáctica de la matemática (Sowder, 1991; Grouws, 1992).

Pero la selección de los problemas de investigación debe estar conectada con un marco teórico y con teorías específicas que den significación a los mismos, de modo que los conocimientos aportados contribuyan a la comprensión global de los fenómenos didácticos. A su vez las teorías específicas están condicionadas por concepciones más generales acerca de la naturaleza de la propia disciplina.

En consecuencia, cuando un educador matemático o un grupo de profesores se interesan por realizar una investigación, tratando de dar una categoría de trabajo científico a su labor, se encuentra, desde el primer momento, ante el problema epistemológico de la naturaleza de la Didáctica de la Matemática y de los paradigmas metodológicos correspondientes. Estas dos cuestiones afectan plenamente a la formulación de los problemas de investigación y a la determinación de la importancia relativa de los mismos.

En nuestro caso, debido a la falta de tradición investigadora y de paradigmas consolidados en este campo, es aún más importante la clarificación de las cuestiones que han comenzado a configurar la Teoría de la Educación Matemática (Steiner et al. 1984), y de los posibles métodos de investigación de las mismas, ya que condicionan los tipos de investigaciones hacia los cuales podemos dedicar nuestros esfuerzos.

2. LA PERSPECTIVA SISTÉMICA

La característica principal de la Didáctica de la Matemática es la de su extrema complejidad. Como describe Steiner, esta disciplina comprende "el complejo fenómeno de la matemática en su desarrollo histórico y actual y su interrelación con otras ciencias, áreas prácticas, tecnología y cultura; la estructura compleja de la enseñanza y la escolaridad dentro de nuestra sociedad; las condiciones y factores altamente diferenciados en el desarrollo cognitivo y social del alumno" [Steiner (1984), p. 16)]

Esto ha llevado a distintos autores al uso de la Teoría de Sistemas para su consideración teórica. La noción interdisciplinar de sistema, adoptada por todas las ciencias sociales, se revela necesaria siempre que se tengan razones para suponer que el funcionamiento global de un conjunto de elementos no puede ser explicado por el simple agregado de los mismos, y que incluso el comportamiento de estos queda modificado por su inclusión en el sistema.

En la didáctica de la matemática el enfoque sistémico es claramente necesario, pues, además del sistema de enseñanza de las matemáticas en su conjunto, y de los propios sistemas conceptuales, hay que considerar los sistemas didácticos materializados en una clase, cuyos subsistemas principales son: el profesor, los alumnos y el saber enseñado.

Chevallard (1985) considera necesario incluir en la problemática didáctica el estudio de un subsistema adicional que denomina noosfera y comprende todas las personas que en la sociedad piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza, influyendo, por tanto, de una manera directa o indirecta sobre ella (formadores de profesores, escritores de textos y materiales curriculares, investigadores, asociaciones de profesores, padres de alumnos, diseñadores del currículo, políticos, directores y administradores de centros de enseñanza, etc.). Pero, además, el sistema didáctico está inmerso en un entorno social, cultural, tecnológico y científico que influye y condiciona su funcionamiento.

Una aproximación sistémica para los problemas didácticos es esencial ya que, como afirma M. Artigue (1984):

- muestra que la Didáctica de la Matemática se encuentra en el corazón de interacciones múltiples y debe, como consecuencia, desarrollar sus propias problemáticas y metodologías, aunque sin despreciar los aportes de las disciplinas conexas, en particular la psicología y la epistemología;
- muestra, reagrupándolas en el seno de una estructura común, lo que liga entre si a las didácticas de las diversas disciplinas pero, al mismo tiempo, indica lo que las separa: saberes diferentes cuya apropiación y transmisión plantea problemas que son, en sí mismos, específicos del conocimiento planteado.

Steiner señala una característica adicional de la visión sistémica de la didáctica de las matemáticas, al indicar que es autoreferente: "con respecto a ciertos aspectos y tareas, la educación matemática como disciplina y como campo profesional es uno de estos subsistemas. Por otro lado, es también el único campo científico que estudia el sistema total. Una aproximación sistémica con sus tareas de auto-referencia debe considerarse como un meta-paradigma organizativo para la educación matemática. Parece ser también una necesidad para manejar la complejidad de la totalidad, pero también porque el carácter sistémico se muestra en cada problema particular del campo" (Steiner, 1985; pág 11).

3. CONCEPCIONES SOBRE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO DISCIPLINA

Ante la extrema complejidad de los problemas de la educación matemática Steiner (1985) indica que se producen dos reacciones extremas:

- los que afirman que la Didáctica de la Matemática no puede llegar a ser un campo con fundamentación científica, y por tanto, la enseñanza de las matemáticas es esencialmente un arte;
- los que, pensando que es posible la existencia de la Didáctica como ciencia, reducen la complejidad de los problemas seleccionando sólo un aspectos parcial (análisis del contenido, construcción del currículo, métodos de enseñanza, desarrollo de destrezas en el alumno, interacción en el aula, etc.) al que atribuyen un peso especial dentro del conjunto, dando lugar a diferentes definiciones y visiones de la misma.

De manera parecida se expresa G. Brousseau (1989) indicando una primera acepción, que consiste en la identificación de la didáctica como el ARTE DE ENSEÑAR - conjunto de medios y procedimientos que tienden a hacer conocer, en nuestro caso, la ciencia matemática.

Brousseau (1989), sin embargo, distingue dos concepciones de carácter científico que denominaremos concepción PLURIDISCIPLINAR y concepción FUNDAMENTAL O MATEMÁTICA. Como bisagra entre estos dos grupos se distingue también una concepción TECNICISTA, para la que la didáctica serían las técnicas de enseñanza, "la invención, descripción, estudio, producción y el control de medios nuevos para la enseñanza: currícula, objetivos, medios de evaluación, materiales, manuales, logiciales, obras para la formación, etc." (pág. 2). Esta concepción conduce hacia una DIDÁCTICA NORMATIVA basada en la ingeniería didáctica y las técnicas empíricas.

En el punto de vista que hemos denominado concepción PLURIDISCIPLINAR de la didáctica, que coincidiría con la segunda tendencia señalada por Steiner, ésta aparece como una etiqueta cómoda para designar las enseñanzas necesarias para la formación técnica y profesional de los profesores. La didáctica como área de conocimiento científico sería el campo de investigación llevado a cabo sobre la enseñanza en el cuadro de disciplinas científicas clásicas, como son: la psicología, la semiología, sociología, lingüística, epistemología, lógica, neurofisiología, pedagogía, pediatría, psicoanálisis, la estadística, la inteligencia artificial, etc.

Como punto de vista distinto al tecnicista y pluridisciplinar, según explica G. Brousseau en el trabajo citado, ha aparecido en Francia otro uso del término didáctica. Los didactas de la matemática que comparten el punto de vista fundamental relacionan todos los aspectos de su actividad con las matemáticas. La razón aportada es que el estudio de las transformaciones de la matemática, bien sea desde el punto de vista de la investigación o de la enseñanza siempre ha formado parte de la actividad del matemático, así como la búsqueda de los problemas - y las situaciones - que requieren una noción matemática o un teorema. Esta entrada al estudio de los fenómenos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas desde el polo de la especificidad del saber supone un nuevo nivel de análisis, distinto de los considerados por las restantes disciplinas de referencia, y aporta una dimensión compatible con los restantes niveles (psicológico, pedagógico, etc.)

La concepción fundamental o matemática, en consecuencia, tiende a integrar todos los sentidos precedentes y a asignarles un lugar en relación a una teoría unificadora del hecho didáctico, cuya justificación y métodos serían específicos y endógeneos. Dicha concepción pudiera ser el comienzo de una respuesta a la necesidad señalada por Steiner "de una base teórica que nos permita una mejor comprensión e identifique las diversas posiciones, aspectos e intenciones que subrayan las diferentes definiciones de educación matemática en uso, para analizar las relaciones entre estas posiciones y conjuntarlas en una comprensión dialéctica del campo total". (Steiner, 1985, pág.11). En Godino (1991) se describe y analiza esta concepción con más detalle y se realiza una valoración de su posible significación en el desarrollo del campo de investigación.

4. CONCEPCIONES DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y PROBLEMAS DE INVESTIGACIÓN

La investigación en Didáctica de la Matemática, al igual que en otros campos (medicina, agricultura, administración, etc.) requiere tanto de desarrollos teóricos como prácticos, esto es, tanto el estudio de los fundamentos del desarrollo cognitivo y las diferencias individuales para el aprendizaje de las matemáticas como de los problemas de toma de decisiones en el aula, la escuela y los programas de formación de profesores (Begle y Gibb, 1980). Se trata de un continuo que va desde la investigación pura, no directamente aplicable a la investigación y desarrollo de tipo tecnológico hasta la elaboración de materiales para la instrucción, después de su correspondiente ensayo y evaluación en entornos tanto de laboratorio como en clases normales.

Las diversas concepciones a que hemos hecho referencia anteriormente se distinguen también por los tipos de problemas que se formulan. Pasaremos a describir, a grandes rasgos, las características de algunos de estos problemas en cada una de las tres concepciones tecnicista, pluridisciplinar y fundamental, así como el dilema teoría-aplicación en el seno de las mismas.

Situados en la posición tecnicista, la investigación se considera como medio de mejora de la planificación de los currículos y la formación de profesores. Este enfoque práctico, de investigación aplicada, está presente en los cuatro niveles con que Burkhardt (1988) clasifica las investigaciones, respecto al número de estudiantes implicados en los mismos:

- Niveles de aprendizaje: proceso de aprendizaje, dificultades y errores, en estudios de casos o de muestras.
- Posibilidades didácticas: Ensayos de innovaciones curriculares con una o pocas aulas; no influye la variable profesor.
- Efectividad de la enseñanza: Introducción de la variable profesor y
- estudios comparativos de métodos alternativos.
- Cambio curricular: y su proceso de implementación en gran escala.

En el enfoque pluridisciplinar, los problemas fundamentales vienen determinados con frecuencia por la ciencia desde la que se contempla el proceso didáctico. "Entre los que piensan que la educación matemática existe como ciencia, encontramos una variedad de definiciones diferentes, por ejemplo, el estudio de las relaciones entre matemática, individuo y sociedad, la reconstrucción de la matemática actual a nivel elemental, el desarrollo y evaluación de cursos matemáticos, el estudio del conocimiento matemático, sus tipos, representación y crecimiento, el estudio del aprendizaje matemático de los niños, el estudio y desarrollo de las competencias de los profesores, el estudio de la comunicación e interacción en las clases. etc." (Steiner (1985), pág. 11).

En la concepción matemática o fundamental, la didáctica se presenta como "una ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específicos de los mismos" (Brousseau, 1989; pág. 3).

Sus objetos de estudio particulares son:

- las operaciones esenciales de la difusión de los conocimientos, las condiciones de esta difusión y las transformaciones que produce, tanto sobre los conocimientos como sobre sus utilizadores.
- las instituciones y las actividades que tienen por objeto facilitar estas operaciones.

Un rasgo característico de la problemática de investigación derivada de la concepción fundamental, que puede verse con detalle en (Balachef, 1990), es su tendencia hacia la teorización y a la construcción de modelos. " El verdadero objetivo de la didáctica es la construcción de una teoría de los procesos didácticos que nos proporcione dominio práctico sobre los fenómenos de la clase" (Chevallard, 1980; p. 152). Mas recientemente Chevallard (1992) sitúa la problemática de investigación en Didáctica de la Matemática en una perspectiva más amplia y profunda: la antropología cognitiva, el estudio del hombre aprendiendo y enseñando matemáticas.

El dilema teoría-aplicación en las concepciones de la didáctica

En la exposición que hemos realizado de las concepciones de la didáctica apreciamos el debate dialéctico entre las tendencias hacia la producción de conocimientos teóricos y conocimientos prácticos. En este sentido puede resultar clarificador utilizar las etiquetas "Didáctica Teórica" y "Didáctica Técnica (o Práctica)": la primera sería la disciplina académica que se interesa por describir y explicar los estados y evolución de los sistemas didácticos y cognitivos, mientras que la segunda se interesa por la problemática de la toma de decisiones en el aula, por la acción reflexiva en un lugar y un tiempo específicos.

En la postura del teórico, lo esencial es conocer cómo funciona el sistema y describir leyes de carácter general que expliquen su dinámica. El descubrimiento de estos principios debe ser prioritario, ya que su aplicación llevaría casi de modo inmediato a la solución de los problemas concretos; tratar de resolverlos desconociendo cómo funciona el sistema puede ser un esfuerzo vano condenado al fracaso.

El punto de vista del práctico, del técnico, del investigador aplicado, pensamos que es bien distinto. Hay un problema que resolver aquí y ahora y no es posible esperar a que la ciencia teórica descubra los principios generales que explique esta clase de fenómenos. Este debate teoría-práctica no es exclusivo de la Didáctica, sino que es visible en muchas ciencias actuales: medicina, economía, etc.

En el caso de la Didáctica de las Matemáticas, tanto la concepción tecnicista como la concepción pluridisciplinar (tradicional y dominante) adoptan un punto de vista de "ciencia aplicada"; los principios teóricos generales vienen dados por otras ciencias básicas, especialmente la psicología, pedagogía, sociología, etc. La didáctica especial de las matemáticas debe aplicar estos principios al caso particular de las nociones y destrezas matemáticas y dar solución al problema de la enseñanza de las matemáticas.

La concepción matemática o fundamental de la Didáctica de las Matemáticas se revela contra este reduccionismo atacando, precisamente, el punto esencial: las teorías generales psico-pedagógicas como el conductismo, constructivismo, teorías del desarrollo (Piaget, Bruner, etc.) aplicadas a la enseñanza- aprendizaje de contenidos específicos no son suficientes. El papel jugado por el saber que se quiere transmitir es fundamental, hasta el punto que, en general, invalida dichos principios. Por tanto, es preciso tratar de construir una teoría propia específica del contenido que explique el funcionamiento del sistema desde la perspectiva del saber. Este punto de vista es, asímismo, claramente sostenido por Freudenthal: "Desconfío fuertemente de las teorías generales del aprendizaje, incluso si su validez se restringe al dominio cognitivo. La matemática es diferente - como he enfatizado anteriormente -, y una de las consecuencias es que no hay en otros campos un equivalente didáctico a la invención guiada" (Freudenthal, 1991, pág. 138).

Puesto que se hallan aún en una primera etapa de desarrollo del marco teórico, la escuela francesa reclama una atención preferente hacia las cuestiones teóricas relegando a un papel secundario las cuestiones técnicas, entre otros motivos porque no se disponen de puntos de referencia seguros para realizar propuestas fundamentadas.

Por nuestra parte, y teniendo en cuenta la complejidad del sistema global de enseñanza, que admite también la descomposición teoría, desarrollo y práctica (Steiner, 1985), pensamos que la optimización de su funcionamiento requiere el esfuerzo conjunto de las distintas perspectivas de investigación. Las investigaciones tanto teóricas como aplicadas constituyen aportaciones necesarias. No obstante, los conceptos teóricos y fenómenos didácticos identificados por la concepción fundamental pueden tener un papel especial, por el punto de vista matemático que adopta, ya que de la difusión del conocimiento matemático se trata.

Finalmente, la conexión teoría - práctica, el cambio social que en última instancia reclaman los conocimientos obtenidos por la investigación teórica, precisa la creación de una "interface" que apenas está desarrollada. ¿Puede estar formada por un reconocimiento explícito del tipo de investigación - acción, hecha con una finalidad de cambio social y de formación?. Las investigaciones llevadas a cabo con la participación de profesores en los equipos de investigación pueden constituir esa "interface" del sistema de enseñanza.

En este sentido se expresa Kilpatrick (1988, p. 204), quien aboga por una colaboración más estrecha entre investigadores y profesores: "Una barrera continua para el cambio es el fallo de los investigadores y profesores en nuestro campo para caminar juntos en la empresa de investigación etc. "parece que algo no funciona teniendo a un grupo decidiendo qué hacer y otro haciéndolo". Interpretamos esto como una toma de postura hacia un paradigma más próximo a la posición socio-crítica de la investigación - acción (Carr y Kemmis, 1986) si se quiere progresar en la optimización del funcionamiento del sistema en su conjunto.

5. PARADIGMAS DE INVESTIGACIÓN

Al tratar de hacer una valoración crítica sobre la naturaleza de los resultados de la investigación en Didáctica de la Matemática nos encontramos con el hecho del carácter relativo de los mismos a las circunstancias particulares de los participantes (profesores y alumnos) y del contexto. Como señala Howson (1988, p. 269) "un descubrimiento empírico en educación matemática no sólo carece de universalidad respecto al contexto, sino incluso de validez a lo largo del tiempo" ya que la sociedad en que tiene lugar la enseñanza de la matemática cambia constantemente.

Otra circunstancia que afecta profundamente a la validez y significación de los resultados de las investigaciones es la cuestión de la perspectiva bajo la cual se lleva a cabo, esto es, el problema del paradigma de investigación. En este sentido, y siguiendo a Shulman (1986), cabe citar los dos polos extremos:

- el enfoque positivista o proceso-producto, que trata, especialmente, de encontrar leyes y de confirmar hipótesis acerca de las conductas y procedimientos que se asocian con ganancias en el rendimiento de los alumnos;
- el enfoque interpretativo, orientado a la búsqueda del significado personal de los sucesos, el estudio de las interacciones entre las personas y el entorno, así como los pensamientos, actitudes y percepción de los participantes.

El programa positivista o proceso-producto utiliza preferentemente los métodos cuantitativos, generalmente asociados con las mediciones sistemáticas, diseños experimentales, modelos matemáticos, mientras que el programa interpretativo (ecológico, etnográfico, etc.) está asociado con las observaciones naturalistas, el estudio de casos, la etnografía y los informes de tipo narrativo. (Erickson, 1986)

Para Eisenhart (1988) los rasgos diferenciales entre ambos enfoques son:

- el modo limitado en que el positivista (comparado con los etnógrafos) entran en las vidas o actividades de los sujetos que estudian;
- escaso interés que los investigadores de la primera tendencia han tenido en los significados intersujetivos que se puedan constituir en las escuelas o aulas que estudian;
- la investigación positivista raramente usa las teorías socioculturales para ayudarse a interpretar sus descubrimientos;
- dentro del enfoque interpretativo, los antropólogos educacionales, prestan una atención limitada a:
    - las capacidades cognitivas
    - teorías del desarrollo cognitivo y procesamiento de la información
- rehúsan la manipulación de variables y el forzamiento de los sucesos naturales.

- raramente se preocupan de intentar hacer algo sobre los problemas educacionales.

Estos programas tan dispares en sus planteamientos han coexistido y aún lo hacen en el campo de la enseñanza y aprendizaje en general, y por tanto, también en la Matemática, especialmente en las investigaciones llevadas a cabo bajo la perspectiva que hemos denominado pluridisciplinar. Pero, como indican Goetz y LeCompte (1988), en general, muchas de las actuales investigaciones educativas, en especial los diseños más creativos, pueden catalogarse en un punto intermedio entre ambos paradigmas. Estos autores prefieren definir el modelo de investigación por cuatro dimensiones o modos suposicionales: deductivo- inductivo, generativo -verificativo, constructivo -enumerativo y subjetivo-objetivo.

La dimensión deductivo-inductivo indica el lugar de la teoría en la investigación: si se parte de teorías previas o éstas son generadas de la investigación. La dimensión generativa verificativa se refiere a la medida en que los resultados de un grupo son generalizables a otros. La investigación verificativa quiere establecer generalizaciones que van más allá de un sólo grupo. Los modos de formulación y diseño de las variables y categorías de análisis definen la dimensión constructiva enumerativa y la subjetiva-objetiva se refiere a los constructos bajo análisis en relación con los participantes estudiados.

Además de los anteriores, hemos de distinguir un tercer paradigma socio-critico, partidario de conectar la investigación con la práctica, con la vista puesta hacia su cambio en la dirección de una mayor libertad y autonomía de los participantes. No es suficiente penetrar en una clase y observar el encuentro educacional. Se precisa también guiar directamente la práctica; esto precisa una mayor colaboración entre el profesor y el investigador (Kilpatrick, 1988).

Un ejemplo de integración entre los diversos paradigmas expuestos viene dado en algunas de las investigaciones desarrolladas por la escuela francesa de Didáctica de la Matemática. Pueden verse, por ejemplo, los trabajos de Brousseau (1986), Douady (1984) y Artigue (1989). Como se ha indicado, el problema principal para la concepción matemática o fundamental es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber con el fin de su optimización, de su control y reproducción en situación escolar esencialmente. Esto va a conducir a conceder una importancia particular al objeto de la interrelacción entre los dos subsistemas (saber - alumno) que es la situación- problema y la gestión de esta interacción por el profesor.

Los supuestos subyacentes a este enfoque metodológico son:

- la complejidad del fenómeno que hace necesario un estudio holístico y de casos, así como disponer de técnicas múltiples de recogida de datos;
- la especificidad respecto al saber matemático, que hace posible la generación de hipótesis previas, a partir del estudio de dicho saber y de su génesis epistemológica;

Estos supuestos le llevan a incorporar en su programa de investigación rasgos de los distintos paradigmas considerados, como pondremos de manifiesto a continuación.

Rasgos del paradigma positivista - experimental:

- hay un tratamiento: se preparan con cuidado las lecciones, los profesores, las situaciones, la forma de trabajar, con la finalidad de provocar efectos específicos;
- se formulan hipótesis previas generadas a partir de una teoría general y del estudio "a priori" de la situación, la cual, a su vez, se construye basada en la teoría;
- se apoyan fuertemente en los métodos estadísticos, especialmente las técnicas del análisis multivariante de datos, aunque dichos datos sean esencialmente de tipo cualitativo. Se intenta contrastar o verificar las hipótesis iniciales. En este sentido se satisface la recomendación de Kilpatrick (1981) en el sentido de que los investigadores en educación matemática deben estudiar nuevas técnicas de análisis exploratorio de datos y presentación de resultados.

Rasgos del paradigma ecológico- etnográfico:

- enfoque holístico: estudio sistémico y global del fenómeno;
- datos de tipo cualitativo, interés en las variables de proceso y en las interrelaciones entre los componentes del sistema;
- posibilidad de generar nuevas hipótesis en el transcurso de la investigación;
- estudio de casos. No se usa el muestreo aleatorio. Se describe con detalle el grupo estudiado;
- técnicas de recogida de datos múltiples, muchas de ellas de tipo etnográfico, como es la observación.
- uso de técnicas de análisis de datos cualitativos: definición de categorías, aunque con el propósito de cuantificación y análisis estadístico.

Resumiendo respecto a los modos suposicionales de Goetz y LeCompte (1988), podríamos decir que el paradigma de investigación implementado por la concepción matemática de la Didáctica de la Matemática se sitúa en los extremos objetivo y enumerativo, estando en un punto intermedio entre deductivo e inductivo y entre generativo y enumerativo.

6. ELEMENTOS PARA UNA PERSPECTIVA DE SÍNTESIS

Consideramos que el punto de vista sistémico debe conducir a la superación de los posibles antagonismos entre las distintas concepciones y paradigmas. Es necesario un compromiso integrador entre Teoría - Desarrollo - Práctica, entre positivismo, interpretativismo y criticismo. Esto lo da la consideración de las distintas concepciones como puntos de vistas complementarios de una acepción más amplia. "El concepto de complementariedad se presenta como útil adecuado para comprender las relaciones entre diferentes tipos y niveles de conocimiento y actividad" (Steiner, 1985; p. 15)

Las concepciones pluridisciplinar y fundamental parecen compatibles y complementarias. La consideración de la Didáctica de la Matemática como parte de las matemáticas puede permitir una "didáctica matemática" de las matemáticas, de igual modo que existe una lógica matemática o una metamatemática. Esta ciencia no puede sustituir la aportación indispensable de las otras ciencias. No hay un sólo aspecto, una sola categoría de fenómenos en las situaciones de enseñanza; la didáctica (en el sentido fundamental) no ha mostrado claramente todavía los fenómenos que toma a su cargo con conceptos y métodos específicos. (Brousseau, 1989).

Inversamente, la integración de los conocimientos exógenos es indispensable y no se puede hacer sino bajo el control de una teoría específica. Asimismo, permite "establecer con la práctica de la enseñanza una relación sana de ciencia a técnica y no de prescripción a reproducción." (Brousseau, 1989; p. 67)

En cuanto a los métodos, Kilpatrick (1981) aboga también por un eclecticismo. No se pueden abandonar las técnicas cuantitativas de tipo estadístico (cuando no han comenzado sino a aplicarse) por los métodos etnográficos exclusivos. El análisis exploratorio de datos lo presenta como complemento enriquecedor de los métodos cuantitativos que los educadores matemáticos deben utilizar. Asimismo, recomienda el planteamiento de líneas de investigación convergentes en las que los estudios exploren una cuestión desde una variedad de perspectivas usando métodos variados, en lugar de insistir en estudios de replicación.

En resumen, las cuestiones planteadas constituyen aspectos esenciales de los puntos propuestos por Steiner (1985) para el programa de desarrollo de la "Teoría de la Educación Matemática":

1) La identificación y elaboración de problemas básicos en la orientación, fundamentación, metodología y organización de la Educación Matemática como una disciplina.
2) El desarrollo de una aproximación comprensiva de la Educación Matemática en su totalidad, contemplándola como un sistema interactivo que comprende la investigación, el desarrollo y la práctica.
3) Desarrollo de su papel dinámico que regule el intercambio teoría-práctica y la cooperación interdisciplinar.

REFERENCIAS

ARTIGUE, M. (1984). Contribution à l'etude de la reproductibilité des situations didactiques. Tesis de Estado. Universidad de París VII.

ARTIGUE, M. (1989). Ingenierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9.3, pag. 281-308.

BALACHEFF, N. (1990). Towards a problématique for research on mathematics teaching. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 21. n. 4, 258-272.

BEGLE, E. & GIBB, (1980) Why do research?. En: R. J. Shunway (Ed.) Research in mathematics education; pag. 3-19. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

BROUSSEAU, G. (1989). La tour de babel. Etudes en Didactique des Mathematiques. Article occacionnel n. 2. IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didáctique des mathématiques. Recherches en Didáctiques des Mathematiques, 7, (2), 33-115.

BURKHARDT, H. (1988). The roles of theory in a 'sistems' approach to mathematical education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, n.5, 174-177.

CARR, W. & KEMMIS, S (1986). Becoming critical. Deakin University Press [traducción en español: Teoría crítica de la enseñanza. Barcelona: Martínez Roca, 1988]

CHEVALLARD, Y (1980). The didactics of mathematics: its problematic and related research. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 1, 146-157.

CHEVALLARD, Y. (1985) La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensé Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par una approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 12. n.1 pp. 73-112.

EISENHART, M.A. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. Journal for Rsearch in Mathematics Education, 19 (2), 99-114.

ERICKSON, R. (1986). Qualitative methods in research on teaching. En M.C. Wittrock. Handbook of research of teaching. London: Macmillan.

FOX, D.J. (1981). El proceso de investigación en educación. Pamplona: EUNSA. (1 ed. inglesa, 1969)

FREUDENTHAL, H. (1981). Major problems of mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 12, 133-150.

FREUDENTHAL, H. (1991). Revisiting mathematics education. (China lectures). Kluwer A.P.

GODINO, J.D. (1991). Hacia una teoria de la educación matemática. En: A. Gutierrez (Ed.), Area de conocimiento: Didáctica de la Matemática, Cap. 3. Madrid: Síntesis.

GOETZ, J. P. y LECOMPTE, M. D. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Madrid: Morata.

GROUWS, D.A. (Ed.) (1992). Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan.

HOWSON, G. (1988). Research in mathematics education. The mathematical Gazette, v. 72, n 462, 265-271.

KILPATRICK, J. (1981). Research on mathematical learning and thinking in the United States. Research en didactiques des mathématiques, 2, 363-379.

KILPATRICK, J. (1988). Change and stability in research in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, n.5, 202-204.

SOWDER, J. (Ed.) (1991). Research agenda in mathematics education: setting a research agenda. LEA & N.C.T.M.

SHULMAN, L.S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: a contemporary perspective. En M.C. Wittrock (Ed.) Handbook of research on teaching. London: Macmillan.

STEINER, H.G. (1984). Theory of mathematics education (TME) - an introductory talk. En: H.G. Steiner & al. (Eds). Theory of mathematics education (TME). ICME 5. Occasional paper 54. Institut fur Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

STEINER, H.G. (1985). Theory of mathematics education (TME): an introduction. For the Learning of Mathematics, 5, 2, 11-17.

WHEELER, D. et al. (1984). Research problems in mathematics education, I, II & III. For the learning of mathematics, 4, (I) 40-47, (II) 39-43, (III) 22-29.

3

RELACIONES DIALÉCTICAS ENTRE TEORÍA, DESARROLLO Y PRÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: UN META-ANÁLISIS DE TRES INVESTIGACIONES[1]

Juan D. GODINO y Carmen BATANERO

Abstract

In this paper three didactic investigations, carried out in academic context, are described. The initial genesis and the research questions, as a consequence of methodological and institutional restrictions. The qualitative meta-analysis of these investigations allows us to reflect on the nature of didactic research, to assess its effectiveness for improving the teaching and learning of mathematics and to pose new research problems. This study is also intended to identify the features of scientific didactic research and to describe its relationships with educational technology and reflective practice of teaching and learning mathematics.

1. CONCEPCIONES SOBRE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y LA INVESTIGACIÓN

El carácter reciente del campo de investigación de la Didáctica de las Matemáticas, y el hecho de que los fenómenos que estudia sean también de interés para otras ciencias y tecnologías, hace que se puedan distinguir diversas concepciones sobre la naturaleza epistemológica de la misma. Estas concepciones cubren un espectro que va desde aquellas que la reducen a un

---

[1] [The dialectic relationhips between research and practice: A meta-analysis of three research works]. En, N. Malara (Ed), *An International View of Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*(pp. 13-22). Universidad de Módena, 1996.

mero apéndice técnico de las Ciencias de la Educación, hasta las que ven en la Didáctica una disciplina científica específica, pasando por la concepción pluridisciplinar (que es tradicional y dominante) que la considera como una "ciencia aplicada". Según esta última concepción, los principios teóricos generales del área vienen dados por otras ciencias básicas, especialmente la Psicología, Pedagogía, Sociología, Epistemología, ... y la Didáctica especial de las Matemáticas debe aplicar estos principios al caso particular de las nociones y destrezas matemáticas.

Como analizamos más detenidamente en Godino (1991 y 1993), la concepción matemática o fundamental de la Educación Matemática, denominada en este caso 'Didáctica de las Matemáticas' - principalmente en los países europeos continentales- rechaza el reduccionismo de la concepción pluridisciplinar, apoyándose en un punto esencial: las teorías psico-pedagógicas, como el conductismo, constructivismo, teorías del desarrollo, etc, aplicadas a la enseñanza-aprendizaje de contenidos específicos son insuficientes. Esta posición es fuertemente apoyada por los investigadores franceses tales como Brousseau (1989), Chevallard (1992), etc., quienes consideran crucial el papel jugado por el saber en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Freudenthal (1991) también adoptó una posición crítica similar respecto de las teorías psicológicas que intentan prescribir modelos instruccionales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por tanto, es preciso tratar de construir teorías de carácter fundamental específicas del contenido, que expliquen el funcionamiento del sistema desde la perspectiva del saber puesto en juego.

En este trabajo vamos a estudiar esta problemática, reflexionando sobre nuestras propias investigaciones y propondremos una perspectiva integradora de las distintas concepciones sobre la Educación Matemática. Teniendo en cuenta la complejidad del sistema global de la enseñanza de las matemáticas, que, como afirma Steiner (1985), admite la descomposición en Teoría, Desarrollo y Práctica, pensamos que la optimización de su funcionamiento requiere el esfuerzo conjunto de las distintas perspectivas de investigación.

Como hipótesis de partida para nuestro análisis y reflexión consideramos que la Educación Matemática es un sistema social heterogéno y complejo en el que es necesario distinguir al menos tres componentes o campos:

a) La acción práctica reflexiva sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

b) La tecnología didáctica que se propone poner a punto materiales y recursos, usando los conocimientos científicos disponibles.

c) La investigación científica, que trata de comprender el funcionamiento de la enseñanza de las matemáticas en su conjunto, así como el de los sistemas didácticos específicos (profesor, estudiantes y el conocimiento).

Consideramos que las disciplinas científicas son esencialmente analíticas y descriptivas, mientras que las tecnologías son normativas. Según M. Bunge, una ciencia es una disciplina que usa los métodos científicos para encontrar estructuras generales (leyes), mientras que la tecnología es "el vastísimo campo de la investigación, diseño y planificación que utiliza conocimientos científicos con el fin de controlar cosas o procesos naturales, de diseñar artefactos o procesos o de concebir operaciones de manera racional" (Bunge, 1985, p. 33).

Estos tres campos se interesan por un mismo objeto -el funcionamiento de los sistemas didácticos-, e incluso tienen una finalidad última común: la mejora de la Educación Matemática. Pero la perspectiva temporal, los objetivos, los recursos disponibles, sus reglas de funcionamiento y las restricciones a que están sometidos, son intrínsecamente distintos. El mundo de la acción práctica es el territorio propio del profesor (el enseñante), el cual tiene a su cargo uno o varios grupos de estudiantes a los cuales trata de enseñar matemáticas. Como se afirma en las conclusiones del Grupo temático 5 "The practice of teaching and research in didactics" del ICME 6, "el primer objetivo de un profesor es mejorar el aprendizaje de sus alumnos, de modo que estará principalmente interesado en la información que pueda producir un efecto inmediato sobre su enseñanza" (p. 264).

El segundo componente, que hemos denominado tecnológico (o investigación aplicada) es prescriptivo, ya que está más comprometido con la elaboración de dispositivos para la acción y es el "territorio" propio de los diseñadores de currículos, los escritores de manuales escolares, materiales didácticos, etc.

Finalmente la investigación científica (básica, analítica y descriptiva) está particularmente comprometida con la elaboración de teorías y se realiza usualmente en instituciones universitarias. Los componentes a) y b) de la Educación Matemática pueden ser comprendidos como "investigación para la acción", mientras que el componente c) es equivalente a "investigación para el conocimiento" (Bartolini Bussi, 1994).

Consideramos que es necesario distinguir los rasgos característicos y las funciones de cada ámbito, para poder analizar el sistema del que forman parte. Si no se reconocen las diferencias existentes entre estos componentes, no se comprenderá el funcionamiento de todo el sistema de la Educación Matemática. El mundo de la práctica necesita soluciones inmediatas que, en el momento actual, difícilmente puede ofrecer la investigación científica. La complejidad de los problemas educativos podría equipararse, en general, a la de otros campos de la actividad humana con mayor tradición, para los cuales no existen aun soluciones a todos los problemas (por ejemplo, la economía o la medicina, etc.). En consecuencia, la tecnología didáctica tiene que operar en muchas ocasiones basándose en el buen parecer, la experiencia, el sentido común de sus actores.

La identificación de estos tres componentes de la Educación Matemática nos permite sugerir a nuestra comunidad de investigadores asignar significados distintos a las expresiones "Didáctica de las Matemáticas" y "Educación Matemática", las cuales se consideran usualmente como sinónimas. La Didáctica de las Matemáticas sería la disciplina científica interesada por el componente c) descrito anteriormente, mientras que la Educación Matemática también incluiría los componentes a) y b), esto es, teoría, desarrollo y práctica. La Didáctica de la Matemática podría considerarse también como la disciplina que asume la responsabilidad de adaptar y articular las contribuciones de otras disciplinas interesadas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como tratamos de representar en la Figura 1. En esta figura también tratamos de enfatizar el papel básico de la Matemática y de la Didáctica de las Matemáticas dentro del sistema social complejo y heterogéneo que es la Educación Matemática.

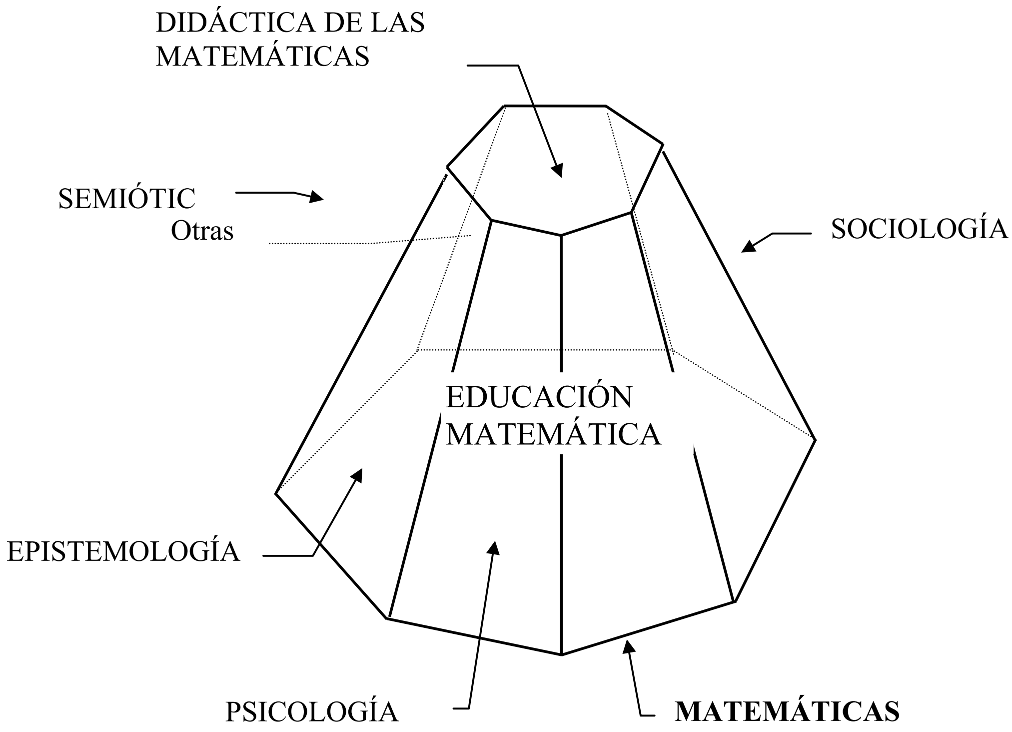
2. META-ANÁLISIS CUALITATIVO DE TRES INVESTIGACIONES DIDÁCTICAS

Con el fin de realizar un análisis de los tres campos mencionados de la Educación Matemática, y de las relaciones dialécticas entre los mismos, vamos a reflexionar sobre tres investigaciones que hemos desarrollado durante los últimos cinco años.

Las investigaciones que describiremos se han realizado en la Universidad de Granada y se han centrado en los siguientes temas:

1) Uso de ordenadores en la enseñanza de la Estadística.
2) Enseñanza de la Combinatoria en Bachillerato.
3) Ontología y epistemología de las matemáticas.

Consideramos que nuestras funciones como directores de tesis doctorales sobre Didáctica de las Matemáticas, como escritores de 'ensayos didácticos' y de propuestas curriculares para la formación de profesores, así como nuestra experiencia en matemáticas y didáctica nos proporciona una buena posición para estudiar las relaciones dialécticas entre los tres campos descritos de la Educación Matemática.



DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS*:* *Es la disciplina científica y el campo de investigación cuyo fin es identificar, caracterizar, y comprender los fenómenos y procesos que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.*

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS*:* *Es la disciplina científica y el campo de investigación cuyo fin es identificar, caracterizar, y comprender los fenómenos y procesos que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.*

Figura 1. *Educación Matemática, Didáctica de las Matemáticas y disciplinas relacionadas*

Las dos primeras se refieren a áreas problemáticas particulares asumidas por dos estudiantes de doctorado que han alcanzado el grado de doctor en Matemáticas (programa de doctorado de Didáctica de las Matemáticas) como consecuencia de la investigación realizada.

La tercera ha sido realizada por nosotros mismos, como consecuencia de los estudios y reflexiones que hemos realizado al asumir una parte de la formación teórica de los doctorandos en cursos sobre Teoría de la Educación Matemática y la dirección de tesis doctorales. Tiene un carácter esencialmente teórico y en ella se elabora una teoría pragmática y relativista del significado de los objetos matemáticos que consideramos útil para el planteamiento de una agenda de investigación coherente en el área.

2.1. Uso de ordenadores en la enseñanza de la Estadística

En el trabajo desarrollado en el área de la enseñanza de la Estadística podemos distinguir claramente los tres componentes o ámbitos descritos de la Educación Matemática: práctica reflexiva, innovación tecnológica e investigación científica.

Este proyecto se inició como consecuencia de mi condición de profesor de Didáctica de las Matemáticas para profesores de EGB, que propició un interés especial por los propios métodos de enseñanza de los contenidos matemáticos que debía impartir. Particularmente, en un curso cuatrimestral de Estadística Descriptiva parecía inevitable preguntarse por el tipo de problemas que debía proponer a mis estudiantes, que fueran de su interés y sirvieran para que comprendieran el sentido de los conceptos y métodos estadísticos. Este trabajo fue reflejado en una comunicación presentada en el "Primer Encuentro Nacional de Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de EGB" (Godino, 1981), motivo por el cual le calificamos como práctica reflexiva, al traspasar el ámbito puramente individual.

Posteriormente, la posibilidad de utilizar algunos ordenadores me impulsó a realizar unos primeros cambios en los contenidos y en el método de enseñanza de esta materia. El tratamiento de colecciones de datos procedentes de problemas realistas y el uso de los ordenadores por los propios estudiantes parecía posible y necesario.

La constitución de un pequeño grupo con los profesores Batanero y Estepa y la consecución de una subvención en el denominado Concurso de Ideas para la realización de clases prácticas (convocado por la MEC) supuso una nueva etapa en el desarrollo de la investigación en el área problemática de la enseñanza de la estadística. En este proyecto desarrollamos tres materiales educativos que fueron evaluados informalmente con estudiantes universitarios en el curso 1986-87:

1) El "paquete de programas" estadísticos (PRODEST), caracterizado por un diseño que calificamos de didáctico, incluyendo una guía descriptiva del paquete (Batanero, Godino y Estepa, 1987).
2) Una colección de actividades prácticas para el laboratorio de estadística;
3) Un texto-apuntes denominado "Curso de estadística basada en el uso de

ordenadores" (Batanero, Godino y Estepa, 1988a y b).

Fruto de estas experiencias fue la toma de conciencia de que la interacción de los estudiantes con el ordenador resolviendo problemas de análisis de datos plantea nuevas dificultades y cuestiones que era preciso estudiar. Algunas de estas dificultades se refieren al uso del propio entorno operativo, otras son de naturaleza cognitiva. ¿Cómo cambian los contenidos a enseñar, en función de las nuevas tecnologías? ¿Cuáles de estos conceptos y métodos estadísticos aprenden los estudiantes con la nueva metodología? ¿Qué dificultades y obstáculos persisten? ¿Cuál debe ser el papel del profesor y de la interacción social en las clases de Estadística?, ...

Estas nuevas cuestiones son abordadas a partir de 1988 bajo un proyecto de investigación titulado "Los ordenadores en el currículo de matemáticas", subvencionado por la DGICYT (MEC, Madrid) y en el contexto institucional académico de la realización de una tesis doctoral por A. Estepa.

A continuación analizamos los resultados de esta tesis, que ha sido defendida en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (Estepa, 1993), desde el punto de vista de sus aportaciones teóricas, tecnológicas y prácticas. También veremos cómo las nuevas circunstancias institucionales condicionaron la evolución de la problemática inicial, hasta llegar a la definición final del problema abordado en la tesis y al diseño metodológico.

Como se ha mencionado, el área problemática inicial de esta investigación fue la indagación de las consecuencias educativas del uso de ordenadores en la enseñanza-aprendizaje de nociones estadísticas elementales, y la determinación de los factores determinantes de las mismas. ¿Qué Estadística (descriptiva) se debería enseñar y cómo, cuando los estudiantes pueden usar un paquete de programas estadísticos? ¿Cómo evolucionan las concepciones de los estudiantes sobre los contenidos enseñados?

La investigación precisó el diseño y aplicación de un proyecto de enseñanza de los contenidos de estadística descriptiva. En dicho proyecto el manejo del paquete de programas estadísticos PRODEST (revisado para que los distintos programas pudieran grabar las interacciones de los estudiantes con los ordenadores), los diversos ficheros de datos y los problemas planteados al alumno sobre los mismos jugaban un papel esencial. La evaluación del cambio de concepciones se apoyaría en un diseño cuasiexperimental con pretest y postest, empleando dos instrumentos paralelos.

Sin embargo, la búsqueda bibliográfica dio como resultado la carencia de instrumentos de evaluación adecuados a los contenidos pretendidos y de estudios que caracterizasen las concepciones de los estudiantes sobre dichos contenidos, lo que nos llevó a la necesidad de construir nuestros propios instrumentos. La necesidad de basar las afirmaciones y propuestas de actuación, derivadas de la investigación, en datos recogidos con instrumentos válidos y fiables para los fines pretendidos nos obligó a restringir la amplitud de los contenidos estadísticos abarcados. Elegimos la noción de *asociación* por su papel relevante dentro de la Estadística.

Desde el inicio de esta nueva etapa de la investigación se vio la necesidad de profundizar en el estudio matemático-histórico sobre la noción de asociación estadística y sus relaciones con la idea filosófica de causa. Esto nos debería permitir identificar las principales variables de tarea del campo de problemas de los cuales emerge dicha noción, las cuales serían utilizadas en la selección de muestras representativas de los problemas para elaborar instrumentos válidos y fiables.

El experimento de enseñanza se realizó con un grupo de 20 estudiantes de Magisterio a los que fue posible realizar un seguimiento sistemático de los procesos de resolución de problemas de análisis de datos con ordenador. La prueba escrita construida para caracterizar los conocimientos y creencias iniciales sobre la noción de asociación estadística de los estudiantes fue aplicada como pretest y postest al grupo experimental y también a una muestra de 213 estudiantes. El análisis detallado de las estrategias de estos estudiantes permitió caracterizar una serie de concepciones iniciales correctas e incorrectas sobre la asociación estadística. Esta información es útil, en sí misma, para cualquier profesor que trate de iniciar una instrucción sobre el tema. En nuestro caso sirvió como elemento de referencia de las concepciones de los estudiantes del grupo experimental.

Las principales conclusiones obtenidas en la investigación fueron las siguientes:

a) Se ha observado una notable mejoría en los juicios de asociación al finalizar la enseñanza, cuando los datos no contradicen las teorías previas de los estudiantes.

b) Se ha observado una evolución positiva en las estrategias de solución utilizadas después de la instrucción.

c) Casi la totalidad de los estudiantes han superado la concepción "localista" sobre la asociación (basar el juicio de asociación en una parte de los datos), y mejora en la concepción "unidireccional" (no considerar la correlación inversa), aunque persiste la concepción "causalista", por la cual los estudiantes confunden correlación y causalidad, al finalizar la enseñanza.

d) En general, los estudiantes no se limitan a emplear un sólo resumen numérico o gráfico de los datos, cuando disponen de un ordenador, sino que utilizan varios programas para integrar la información, como paso previo a la resolución de los problemas.

e) El resumen estadístico más empleado es la tabla de contingencia, construida mediante un proceso iterativo, seguida de la utilización de estadísticos de orden o de valor central.

f) Las estrategias utilizadas han tenido mayor grado de corrección que cuando no se usa ordenador, apareciendo nuevas estrategias, en especial el empleo de estadísticos de orden.

Un nivel de análisis más profundo de los fenómenos de aprendizaje se realizó mediante el seguimiento del proceso de aprendizaje de una pareja de estudiantes, utilizando el análisis de sus interacciones con el ordenador. Esta última fase de la investigación ha permitido identificar diferentes actos en la comprensión del concepto de asociación. Esta información es un paso necesario para la elaboración de situaciones didácticas específicas encaminadas a facilitar el logro de tales actos de comprensión, y por tanto, la superación de concepciones inadecuadas.

Como vemos, la investigación ha permitido obtener una gran cantidad de información utilizable en la planificación de la enseñanza y en el diagnóstico de las dificultades de aprendizaje. En el plano tecnológico se ha aportado un material experimentado para la enseñanza de la Estadística Descriptiva y una prueba para la evaluación de las concepciones previas de los sujetos sobre la idea de asociación estadística. Sin embargo, reconocemos que se precisa continuar los esfuerzos de investigación sobre otros conceptos y métodos estadísticos, así como diseñar nuevos experimentos de enseñanza para estudiar la estabilidad de nuestras conclusiones.

2.2. Enseñanza de la Combinatoria en Bachillerato

La Combinatoria es considerada generalmente como un tema difícil de las Matemáticas de secundaria, reconociéndose, además, que su enseñanza es de interés en estos niveles por su carácter central dentro de la matemática discreta y por desempeñar un papel relevante en el desarrollo de las capacidades lógicas de los sujetos (Piaget e Inhelder, 1951; Fischbein, 1975).

Estas razones nos indujeron a proponer como tema de investigación a una estudiante de doctorado la "enseñanza de la combinatoria en bachillerato". Las cuestiones "ingenuas" que nos planteamos inicialmente fueron:

- ¿Qué contenidos proponen los programas oficiales y los manuales escolares como saber a enseñar?
- ¿Qué piensan los profesores sobre la enseñanza y las dificultades de aprendizaje del tema?
- ¿Por qué es difícil la combinatoria?
- ¿Cómo se debería enseñar la combinatoria?

Después de invertir un tiempo en aclarar las dos primeras cuestiones nos dimos cuenta que, como paso previo para proponer acciones prácticas sobre la instrucción, era necesario dilucidar la propia naturaleza de la Combinatoria elemental. Sólo después de conocer la estructura de los problemas combinatorios simples y la naturaleza de las herramientas conceptuales desarrolladas para resolverlos se pueden hacer propuestas de actuación racionales, esto es, basadas en conocimientos científicos.

El estudio sistemático del contenido y de la bibliografía nos permitió identificar la existencia de una variable de tarea de los problemas combinatorios, que hemos denominado "modelo combinatorio implícito en los enunciados" (MCI) , que podría explicar, al menos una parte de las dificultades del tema y que no había sido considerada en las investigaciones anteriores. Esta variable responde a las tres modelizaciones básicas de los problemas combinatorios simples: el esquema de selección de muestras, colocación de objetos en urnas y como particiones de un conjunto. Otras variables que habían mostrado su efecto sobre las dificultades de las tareas combinatorias en investigaciones previas son la operación combinatoria (variaciones, permutaciones, combinaciones), el tamaño de los parámetros, tipo de operación y contexto.

Para probar los efectos de la variable MCI en los procesos de resolución de los problemas y su posible interacción con las restantes variables mencionadas fue preciso elaborar una prueba válida para los fines pretendidos y fiable. Después de sucesivos ensayos piloto la prueba fue aplicada a una muestra de 720 alumnos de primer curso de bachillerato, la mitad con instrucción en Combinatoria y el resto sin instrucción previa.

El ámbito científico-teórico en que se desarrolló esta investigación y el planteamiento del problema implicaba un compromiso especial con la justificación de las afirmaciones pretendidas sobre los hechos observados. Para determinar si la variable MCI afecta o no y de qué manera al proceso de instrucción en Combinatoria, ha sido preciso aplicar un riguroso diseño experimental del cuestionario y un complejo proceso de análisis multivariante de datos. Para comprobar la significación estadística de las diferencias entre las medias de estas dos muestras de alumnos, y su dependencia de las diversas variables de tarea incluidas en el cuestionario, se realizó un Análisis de Varianza. Para estudiar las interrelaciones entre los diferentes items se efectuó un Análisis Cluster, un Análisis Factorial y un Análisis Implicativo. Y con el fin de estudiar las asociaciones entre los errores y la influencia sobre los mismos de las variables de tarea consideradas, se realizó un Análisis de Correspondencias. Las entrevistas clínicas realizadas a una muestra reducida de alumnos permitió profundizar en las estrategias de resolución de los problemas y en la comprensión de los conceptos combinatorios por parte de los alumnos. Todos los resultados corroboran el papel de variable didáctica de MCI, que, por tanto, debe recibir una atención particular en la planificación de la instrucción sobre el tema.

El proyecto de investigación sobre Combinatoria fue iniciado en 1989 y se ha terminado en 1994 con la defensa de la tesis doctoral de Navarro-Pelayo (1994). Han sido necesarios cinco años de dedicación casi plena de una persona (la doctoranda), asistida por el director de la investigación y otros colaboradores.

La principal contribución teórica ha sido mostrar el papel relevante de la variable MCI en la enseñanza y aprendizaje de la Combinatoria, lo que implica la necesidad de tener en cuenta esta variable en la planificación del currículo correspondiente. Los conocimientos producidos en esta investigación nos parecen de interés evidente tanto para los diseñadores de currículo, autores de manuales escolares como para el propio profesor que deba enseñar Combinatoria en los niveles secundarios. En nuestro libro (Batanero y cols. 1994) desarrollamos una propuesta curricular que utiliza sistemáticamente los conocimientos científicos "producidos" en esta tesis. Este libro, y el publicado sobre las nociones de azar y probabilidad (Godino y cols., 1987), dirigidos a profesores y diseñadores del currículo matemático, son contribuciones de carácter tecnológico que muestran formas posibles de cooperación entre teoría y práctica.

2.3. Ontología y epistemología de las matemáticas. Una teoría del objeto matemático y sus significados

Las dos investigaciones que hemos descritos son ejemplos del tipo de cuestiones que nuestros alumnos de doctorado se han planteado en la realización de su trabajo y podrían describirse como investigaciones de primer nivel dentro de nuestra área de conocimiento, ya que abordan directamente problemas didácticos. Un segundo nivel de reflexión sería el análisis de los fundamentos en que apoyamos estas investigaciones, tanto de tipo teórico como metodológico. Dado que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son objeto de estudio de diversas ciencias, podríamos preguntarnos si son suficientes las aportaciones de estas disciplinas para fundamentar nuestra investigación. Entre estas ciencias, que podríamos llamar fundacionales de la Educación Matemática, podemos incluir la Sicología, Sociología, Matemáticas, Filosofía, Pedagogía, Historia de las Matemáticas, Lingüística, etc. Como justificamos en Godino (1991), dado que cada una de ellas atiende sólo a aspectos parciales de la Educación Matemática, consideramos que se precisa una disciplina autónoma que trate de integrar estos conocimientos y de indagar aquellos aspectos de la enseñanza de las Matemáticas cuya naturaleza es irreductiblemente matemática.

La complejidad de los problemas educativos, pone a la Didáctica de las Matemáticas ante el dilema de desarrollar un espacio de indagación propio de carácter básico o fundamental. No es posible explicar y predecir el funcionamiento de los sistemas didácticos si no se aclaran y explicitan los supuestos ontológicos y epistemológicos de las propias matemáticas y de los procesos psico-sociales que tienen lugar en la formación de los conocimientos matemáticos. La indagación didáctica realizada con criterios de rigor científico exige elaborar teorías sobre las cuestiones mencionadas, en las cuales basar agendas de investigación coherentes y productivas.

Sin embargo, la ontología y epistemología de las entidades matemáticas son interpretadas de manera muy diversa por las disciplinas interesadas por la cognición humana. Por esta razón hemos comenzado una indagación sistemática sobre la naturaleza y origen de los objetos matemáticos, sus significados y comprensión. La teoría de los significados institucionales y personales de lo objetos matemáticos que hemos desarrollado (Godino y Batanero, 1994; en prensa) es una primera consecuencia de nuestra investigación sobre estas cuestiones. A continuación presentamos una breve síntesis de esta teorización, analizando su motivación y potencial utilidad.

Partiendo de las tendencias recientes en Filosofía de las Matemáticas (Tymoczko, 1986; Ernest, 1991) hemos elaborado una teoría sobre las ideas de *objeto matemático* y su *significado*, en la cual postulamos una doble dimensión -epistemológica y psicológica- tanto para los propios objetos, como para sus significados. Reconocemos explícitamente una estrecha inspiración de esta teorización en las ideas de "objeto" y "relación al objeto" desarrolladas por Chevallard (1991, 1992) y en la teoría de Wittgenstein (1953) del "significado como uso". La perspectiva educativa e intención integradora adoptada nos conduce a introducir, no obstante, elementos teóricos -como los de objeto personal o mental- que están en consonancia con los planteamientos de la epistemología psicologista de Kitcher (1984) y de la teoría de la cognición situada (Brown, Collins y Duguid, 1989).

Aceptamos la visión de los objetos matemáticos como símbolos de entidades culturales, cuya naturaleza sistémica y compleja no puede ser descrita exclusivamente mediante definiciones formales cuando estamos interesados por los procesos de enseñanza y aprendizaje de los mismos. Partiendo de esta posición, tratamos de explicar algunas concepciones incorrectas y dificultades de aprendizaje reconociendo la complejidad del significado y la inevitable parcialidad de los procesos de enseñanza.

Las hipótesis epistemológicas y psicológicas que sirven de punto de partida para la teoría desarrollada son las siguientes:

a) Las matemáticas constituyen una actividad humana que se interesa por la solución de situaciones problemáticas, las cuales pueden referirse al mundo físico, social, o al propio dominio de las Matemática. Como respuesta o solución a estos problemas externos o internos, los objetos matemáticos emergen y evolucionan progresivamente. Por tanto, son los actos de las personas la fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas, de acuerdo con las teorías constructivistas Piagetianas.

b) Las Matemáticas constituyen un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones-problemas y las soluciones encontradas. Los sistemas de símbolos, dados por la cultura, tienen una función comunicativa y un papel instrumental, ya que cambian a las propias personas que usan los símbolos como mediadores. Este supuesto asume los planteamientos psicológicos de Vygostskii y los semióticos de Rotman.

c) Las Matemáticas constituyen un sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido. Los objetos matemáticos son entidades culturales cuya naturaleza sistémica y compleja no puede ser descrita meramente con definiciones formales cuando nos interesamos por los procesos de enseñanza y aprendizaje de los mismos.

Las abstracciones o generalizaciones, tanto en su faceta psicológica como epistemológica (objetos personales e institucionales), son consideradas como emergentes de los sistemas de prácticas (personales, respec. institucionales) realizadas por una persona (o en el seno de una institución) ante cierta clase de situaciones-problemas o disposiciones del entorno.

Los sistemas de prácticas prototípicas significativas -esto es, eficaces para el fin pretendido- son consideradas como el origen genético de los distintos "objetos personales" (invariantes operatorios de índole psicomotriz, "conceptos y teoremas en acto", conceptos y proposiciones formalizadas, etc). La especificidad de tales sistemas de prácticas respecto a los contextos institucionales particulares determina, asimismo, la emergencia de objetos personales e institucionales específicos. Se postula, por tanto, una relatividad intrínseca de los objetos emergentes respecto a las distintas instituciones involucradas en los campos de problemas, y dependiente, asimismo, de las formas expresivas disponibles. Este planteamiento permitirá apreciar las adaptaciones (o transposiciones) e influencias mutuas que sufren los objetos matemáticos para ser transmitidos entre personas e instituciones.

Esta relatividad y multiplicidad de objetos es compatible, no obstante, con el papel "dominante" y de "control" (en términos ecológicos) de la organización lógica y formal adoptada por las matemáticas en la institución Matemática (productores de nuevos conocimientos matemáticos), principalmente debido a su efectividad en el planteamiento y resolución de nuevos problemas. No obstante, esta organización lógica, que sin duda es eficaz en los procesos de justificación e invención de los objetos, no está exenta de problemas para la comunicación y difusión de los mismos, al prescindir de los contextos, situaciones y actuaciones personales de los que emergen dichos objetos.

El constructo que hemos elaborado en nuestra teoría, que denominamos "s*ignificado personal e institucional*" de un objeto matemático, es una entidad extensiva, que se contrapone al carácter intensivo del objeto, y permite reorientar las cuestiones de diseño y evaluación de situaciones de enseñanza y de evaluación de los conocimientos de los sujetos. Al postular el carácter sistémico de los significados se pone en evidencia el carácter muestral de las mencionadas situaciones de enseñanza y evaluación y los problemas de inferencia asociados. Como consecuencia de la teoría elaborada, en Godino y Batanero (1994a) proponemos una agenda de investigación para la Didáctica de las Matemáticas centrada, como área prioritaria, en la caracterización de los significados personales e institucionales de los objetos matemáticos, su mutua interdependencia y desarrollo evolutivo.

El interés principal de esta investigación didáctica, que hemos analizado como ejemplo de estudio teórico, es que ofrece la posibilidad de presentar, bajo una perspectiva unificadora, la investigación en Didáctica de las Matemáticas, a partir de las nociones de *semiometría* (determinación de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos) y *ecología de significados* (estudio de las condiciones de desarrollo, adaptaciones y relaciones mutuas entre los significados institucionales y personales) (Godino y Batanero, en prensa).

Esta investigación no ha surgido aisladamente, sino que se ha apoyado en trabajos previos y continúa la dirección iniciada por otros autores como Steiner (1987), Brousseau (1986) o Chevallard (1992), etc. decididos defensores de la Didáctica como campo de investigación teórica autónoma, aunque no independiente de otras áreas del conocimiento, sino en diálogo con las mismas.

3. ALGUNAS CONCLUSIONES

El fin perseguido en el meta-análisis realizado de las tres investigaciones descritas ha sido, en primer lugar, poner de manifiesto algunos rasgos distintivos de la investigación científica dentro de la Didáctica de las Matemáticas, respecto de las de tipo tecnológico o práctico. Entre los fines principales de la investigación científica están la descripción, explicación y predicción del comportamiento de los sistemas didácticos. Como expresa Kilpatrick (1993): "Podemos buscar generalizaciones, no como leyes naturales que determinen cómo actúan los profesores o los alumnos, sino como tendencias o patrones en el flujo de sucesos de la clase" (p. 28). El fin de la investigación tecnológica y la práctica reflexiva es resolver problemas específicos en situaciones y contextos dados.

La investigación científica está guiada por la teoría y pretende desarrollar teoría, debiendo asentarse en los trabajos precedentes sobre la misma problemática. Las cuestiones de investigación no se delimitan correctamente hasta tanto no se realiza la preceptiva revisión bibliográfica y se conocen las ideas de los autores que han investigado previamente sobre problemas similares. Las afirmaciones pretendidas deben integrarse en un cuerpo de conocimientos en continuo crecimiento. Pensamos que esta preocuparación es, en gran medida, ajena a la práctica reflexiva e incluso a la tecnología, ya que su interés primario es la acción sobre contextos particulares, con frecuencia específicos e irrepetibles.

La investigación científica está sometida, en el seno de la institución en la que se desarrolla, a una serie de normas que afectan a las formas expresivas (rigor, reproductibilidad) y a las formas de justificación de las afirmaciones (validez, consistencia, objetividad). A estos criterios, podrían añadirse los deseables de *originalidad* y *relevancia* (Sierpinska, 1993), más difíciles de alcanzar. En los ámbitos de la investigación tecnológica y la práctica reflexiva los criterios de carácter prioritario son otros, como los de utilidad, facilidad, coste, rapidez, eficacia, rentabilidad, etc.

A pesar de estas diferencias, en los ejemplos que hemos descrito, se pone también de manifiesto el carácter complementario e interdependiente de la investigación tecnológica y científica, lo que puede comprenderse mejor bajo el marco interpretativo de la epistemología ecológica (Godino, 1993). Estas tres actividades tienen lugar en ámbitos institutionales distintos, utilizan recursos diferentes y cumplen también funciones distintas. Como hemos indicado, estas formaciones epistemológicas se diferencian sustancialmente en los fines, formas expresivas y en los criterios de justificación, esto es, tienen *nichos ecológicos* propios. Pero la investigación o indagación disciplinada en cada uno de estos campos produce conocimientos útiles y necesarios para el funcionamiento y mejora progresiva del ecosistema global, que es la Educación Matemática.

En nuestros ejemplos, el punto de partida han sido cuestiones relevantes para los profesores: cómo enseñar un contenido particular (la combinatoria elemental, la estadística descriptiva). Pero la lógica y las necesidades del proceso inicial de investigación (tecnológica) nos ha llevado a cuestiones progresivamente más teóricas: cómo afecta la variable "modelo combinatorio implícito en los enunciados de los problemas" al razonamiento de los estudiantes, cómo evaluar estos razonamientos de los alumnos, cómo podemos determinar si un alumno conoce la combinatoria, qué es conocer las matemáticas, que son los objetos matemáticos, etc.

Con ello hemos visto la necesidad de tener que afrontar delicados y complejos problemas teóricos, cuya naturaleza está bastante alejada de las cuestiones prácticas y tecnológicas planteadas inicialmente. La detección y explicación de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas por los estudiantes requieren el diseño de situaciones de evaluación. La superación de estas dificultades por parte de los alumnos precisa organizar secuencias adecuadas de situaciones didácticas. Todo ello debe estar basado en los resultados de la investigación, que , a su vez, se debe fundamentar en supuestos epistemológicos y cognitivos explícitos sobre las matemáticas y su aprendizaje. Pero, dado que las disciplinas de referencia no siempre proponen soluciones claras y definitivas para estos fundamentos , el didacta tiene que construirlos directamente desde su propia perspectiva y necesidades, o integrar propuestas diferentes.

REFERENCIAS

Bartolini Bussi, M. G.: 1994, 'Theoretical and empirical approaches to classroom interation', en R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straser and B. Winkelmann (Eds), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 121-132). Kluwer, A. P., Dordrecht.

Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A.: 1987, 'Un paquete didáctico de programas para el laboratorio de estadística', *Actas del Simposium Internacional de Educación e Informática.* ICE de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid (pp. 380-386).

Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A.: 1988a, *Curso de estadística aplicada basado en el uso de ordenadores*. Los autores, Jaén.

Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A.: 1988b, *Laboratorio de estadística. Uso del paquete de programas PRODEST*. Los autores, Jaén.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V.: 1994, *Razonamiento combinatorio*. Síntesis, Madrid.

Brousseau, G.: 1986, 'Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7 (2), 33-115.*

Brousseau, G.: 1989, 'La tour de Babel', *Article occasionnel nº 2.* IREM de Bordeaux. Université de Bordeaux I.

Brown, J. S., Collins, A. y Duguid, P.:1989, 'Situated cognition and the culture of learning', *Educational Researcher,* Jan-Feb., 32-42.

Bunge, M.: 1985, *Seudociencia e ideología.* Alianza Universidad, Madrid.

Chevallard, Y.: 1992, 'Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12, (1), 73-112.

Ernest, P.: 1991, T*he philosophy of mathematics education.* Falmer Press, London.

Estepa, A.: 1993, *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Doctoral dissertation. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Fischbein, E.: 1975, *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. D. Reidel, Dordrecht.

Freudenthal, H.: 1991, *Revisiting mathematics education.* Kluwer, A. P., Dordrecht.

Godino, J. D.: 1981, 'La enseñanza de la estadística en las Escuelas Universitarias de Magisterio', *Actas del Primer Encuentro Nacional de Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de EGB.* ICE de la Universidad de Málaga. (pp. 483-493)

Godino, J. D.: 1991, 'Hacia una teoría de la didáctica de la matemática', en A. Gutierrez (Ed.), *Área de conocimiento, Didáctica de la Matemática* (pp. 105-148). Síntesis, Madrid.

Godino, J. D.: 1993, 'Paradigmas, problemas y metodologías en Didáctica de la Matemática', *Quadrante,* 2, (1), 9-22.

Godino, J. D.: 1993, 'La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática', *Quadrante*, 2, (2), 69-79.

Godino, J. D. y Batanero, C.: en prensa, 'Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education', en J. Kilpatrick and A. Sierpinska (Eds), *ICMI Study Publication on Research in Mathematics Education.* Kluwer A. P., Dordrecht.

Godino, J. D. y Batanero, C.: 1994b, 'Significado institucional y personal de los objetos matemáticos', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14, (3), 325-355. [English translation published by *Journal für Mathematik didaktik* 7(2), 99-121; 1996]

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J.: 1987, *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Síntesis, Madrid.

Kitcher, P.: 1984, *The nature of mathematical knowledge,* Oxford University Press, New York.

Kilpatrick, J.: 1981, 'The reasonable ineffectiveness of research in mathematics education', *For the Learning of Mathematics*, 2, 2, 22-29.

Kilpatrick, J.: 1993, 'Beyond face value: assessing research in Mathematics Education', en G. Nissen and Bomhoj (Eds), *Criteria for scientific quality and relevance in the Didactics of Mathematics* (pp. 15-34). Roskilde University, IMFUFA, Denmark

Navarro-Pelayo, V.: 1994, *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Doctoral dissertation. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Piaget, J. y Inhelder, B.: 1951, *La genèse de l'idèe de hasard chez l'enfant*. Presse Universitaires de France, Paris.

Sierpinska, A.: 1993, 'Criteria for scientific quality and relevance in the Didactics of Mathematics', en G. Nissen and Bomhoj (Eds), *Criteria for scientific quality and relevance in the Didactics of Mathematics* (pp. 35-74). Roskilde University, IMFUFA, Denmark

Steiner, H.G.: 1985, 'Theory of mathematics education (TME): An introduction', *For the Learning of Mathematics*, 5 (2), 11-17.

Tymoczko, T. (Ed.): 1986, *New directions in the philosopy of mathematics*. Kirkhauser, Boston.

Vergnaud, G.: 1990, 'La théorie des champs conceptuels', *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 10 (2/3), 133-170.

Wittgenstein, L.: 1953, *Investigaciones filosóficas.* Crítica, Barcelona [1988].

4

LA METÁFORA ECOLÓGICA EN EL ESTUDIO DE LA NOOSFERA MATEMÁTICA [1]

Juan D. GODINO

Este trabajo extiende, con algunas ideas adicionales, la ponencia que tuve ocasión de presentar en la mesa redonda que, con el título "Cultivons la Mathématique", se celebró en Paris (en Julio de 1992), durante el Primer Congreso Europeo de Matemáticas. El título de dicha mesa redonda me llevó de un modo natural a tratar de desarrollar la metáfora implícita en el mismo: la matemática puede ser considerada como una "planta" que crece y se desarrolla en ciertos hábitats y que necesita "cuidados" para que mantenga su vitalidad.

El análisis de la problemática que plantea el uso de las matemáticas en las distintas instituciones, las relaciones de los propios objetos matemáticos entre sí y con otros campos de conocimiento puede facilitarse comparando esta problemática con la de la ecología, considerada como la disciplina científica que se interesa por las relaciones entre los organismos y sus entornos pasados, presentes y futuros. *"Estas relaciones incluyen las respuestas fisiológicas de los individuos, la estructura y dinámica de las poblaciones, las interacciones entre especies, la organización de las comunidades biológicas y el procesamiento de la energía y la materia en los ecosistemas"* (Revista "Ecology"; American Ecological Society)

Desde el trabajo de Lakoff y Johnson (1980) sobre el papel relevante de los conceptos metafóricos en la estructuración del sistema conceptual humano, el uso de la metáfora ha quedado justificado como medio para comprender y experimentar una realidad en términos de otra. Pensamos que la metáfora ecológica, propuesta por Chevallard (1989) para el análisis didáctico y por Morin (1992) para las ideas en general, puede constituir un recurso de gran utilidad para comprender la génesis, el desarrollo y las funciones de los saberes matemáticos en las instituciones humanas. El análisis de la ecología institucional de un saber nos lleva a conocer sus hábitats, o sea los "lugares" donde se encuentra, los objetos con los cuales entra en asociación, las estructuras de

[1] *Quadrante (Revista Teórica e de Investigacao)*,Vol 2, Nº 2, pp. 69-79, 1993 (Associaçao de Professores de Matemática. Portugal)

soporte y las funciones de estas interrelaciones, esto es, los nichos ecológicos de los saberes matemáticos.

En este trabajo nos interesamos por la problemática del uso de las matemáticas, sus características y condiciones de desarrollo en la cultura y la sociedad actual, sirviéndonos de pauta la metáfora ecológica y en particular del concepto de econicho. Un enfoque moderno de este concepto, basado en la teoría general de sistemas (Patten y Auble, 1980), permite aplicarlo a objetos no vivos, sustituyendo los criterios de "viabilidad", persistencia o existencia indefinida, por cualquier noción de utilidad, disponibilidad, acoplamiento o compatibilidad.

Hasta aquí hemos interpretado la "**ecología de las ideas matemáticas**" como una metáfora que ayuda a comprender la génesis, desarrollo y funcionamiento de los objetos matemáticos (conceptos, teorías, métodos, etc). Pero hay que resaltar que existe una corriente en epistemología y sociología del conocimiento que va más allá de un planteamiento metafórico para estas cuestiones. Toulmin (1977) introduce la expresión "**ecología intelectual**" para destacar las cuestiones de función y adaptación a las necesidades y exigencias reales de las situaciones problemáticas de los conceptos colectivos y los métodos de pensamiento. Asimismo, el trabajo de Morín (1992), "**Las ideas, su hábitat, su vida, sus costumbres, su organizació**n" constituye un ejemplo relevante. Este autor considera tan inadecuada la creencia en la realidad física de las ideas, como el negarles un tipo de realidad y existencia objetiva. Para este autor, las ideas en general (y por tanto las nociones matemáticas), además de constituir instrumentos de conocimiento, tienen una existencia propia y característica.

"Los números son reales, aún cuando no existan en tanto que tales en la naturaleza. Su tipo de realidad, transcendente, cuasi pitagórica según un punto de vista, no ha dejado de atormentar al espíritu de los matemáticos" (Morin, 1992; p. 111).

Las creaciones del espíritu, aunque son producidas por el hombre y dependen de la actividad humana que las producen, adquieren una realidad y una autonomía objetiva; configuran lo que Popper denomina el "tercer mundo" y Morin (usando el término de Teilhard de Chardin) describe como **noosfera**. La noosfera emerge con vida propia a partir del conjunto de las actividades antroposociales. En consonancia con esta "nueva realidad" surge la posibilidad de una ciencia, la **noología**, que sería la ciencia de la vida de los "seres del espíritu", considerados como entidades objetivas.

*"Pero esto no excluye en absoluto considerar igualmente estas "cosas" desde el punto de vista de los espíritus/cerebros humanos que las producen (**Antropología***

> ***del conocimiento**) y desde el punto de vista de las condiciones culturales de su producción (**Ecología de las ideas**)" (Morin, 1992; p. 115). Todos estos puntos de vista son complementarios.*

Esta nueva perspectiva epistemológica lleva a distintos pensadores a considerar las ideas como entidades dotadas de una actividad propia y a plantearse las siguientes preguntas:

> *"¿Cómo actúan las ideas unas sobre otras?¿Existe una especie de selección natural que determina la supervivencia de ciertas ideas y la extinción de otras? ¿Qué tipo de economía limita la multiplicación de ideas en una región del pensamiento? ¿Cuáles son las condiciones necesarias para la estabilidad (o la supervivencia) de un sistema o subsistema de este género" (Bateson, (1977), "Ecología del espíritu"; citado por Morín (1992), p. 112)*

El **locus** o lugar de la realidad matemática es para White (1983) la tradición cultural, es decir, el continuum de conducta expresada por símbolos. Dentro del cuerpo de la cultura matemática ocurren acciones y reacciones entre los distintos elementos. "*Un concepto reacciona sobre otros; las ideas se mezclan, se funden, forman nuevas síntesis*" (White, 1983; p. 274).

ECOLOGÍA DE LOS SABERES MATEMÁTICOS

La aplicación de la metáfora ecológica al estudio de la evolución de los saberes implica considerarlos como "organismos" u "objetos" que interaccionan y desempeñan un "role" en el seno de instituciones donde se reconoce su existencia cultural, las cuales vienen a ser su "hábitat". Parece claro que no es posible pensar en los saberes independientemente de las personas que los piensan y usan. Pero la identificación de la existencia de un saber precisa de un reconocimiento colectivo, esto es, se trata de un emergente de un sistema de prácticas sociales reconocidas. Una tipificación de acciones habitualizadas por tipos de actores es una institución (Berger y Luckmann, 1968); las instituciones son, pues, los hábitat de los saberes.

Una de las posibilidades que ofrece el paradigma ecológico consiste en su capacidad de dar sentido a nuevas cuestiones que de otro modo parecen evidentes o sin interés. Asimismo, lleva a centrar nuestra atención en aspectos contextuales e interacciones que con frecuencia pasan inadvertidos. A título de ejemplo indicamos, a continuación, algunas de estas cuestiones.

a) ¿Cuáles son los hábitats que ocupan actualmente los saberes matemáticos? .Cuáles son los distintos usos que se hace de las matemáticas en dichos hábitats?

b) ¿Existen instituciones en las que las matemáticas podrían ser utilizadas más intensa y adecuadamente?

c) ¿Qué tipo de restricciones del entorno (factores limitativos) dificultan que las matemáticas ocupen los nichos ecológicos vacíos?

d) ¿Cómo se relacionan las matemáticas con los restantes saberes presentes en las distintas instituciones?

e) ¿Es posible identificar sub-especies (sub-saberes) como consecuencia de fenómenos de adaptación al entorno?

f) ¿Existen relaciones especiales de competición, simbiosis, y de dominancia y control entre saberes y sub-saberes que condicionen la difusión idónea de las matemáticas?

g) En general, en el conjunto de la sociedad, la matemática no es suficientemente apreciada, por lo que tiene una existencia precaria. ¿Cuáles son los factores que determinan esta "matofobia"?

Trataremos de proponer algunas respuestas parciales a estas cuestiones cuya pertinencia podrá ser objeto de debate de otros trabajos.

Interesa destacar, en primer lugar, la identificación de tres tipos de "sub-especies" matemáticas, como consecuencia de procesos de adaptación a distintas instituciones. Se trata de las matemáticas puras, aplicadas y escolares. La convivencia entre estas sub-especies no está ausente de problemas que dificultan una difusión óptima de las matemáticas. La transposición didáctica (Chevallard, 1985) se presentaría como el fenómeno de adaptación al entorno escolar de las matemáticas puras y aplicadas. Entre éstas dos últimas también cabria diferenciar fenómenos de adaptaciones mutuas que podríamos denominar como "transposiciones modelizadoras". Estas subespecies coexisten, a veces, en las mismas instituciones. En la universidad, por ejemplo, lo habitual es que los profesores sean, a la vez investigadores implicados en la producción de nuevos conocimientos.

Un aspecto problemático que identificamos se refiere al fenómeno de "dominancia y control" que la institución MP (matemáticos puros) ejerce sobre MA (matemáticos aplicados) y ME (matemáticos educadores) y que tiene consecuencias negativas. La matemática aplicada es vista con frecuencia por los "matemáticos puros" como algo de inferior categoría. Se ignora con frecuencia y se infravalora la dosis de creatividad requerida en el proceso de modelización de los problemas de la realidad y de la necesaria contextualización educativa.

Dentro de los diversos hábitats de las matemáticas, el primero en orden de importancia en cuanto a su extensión, es la Educación Matemática entendida como un sistema que incluye no sólo la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sino el diseño curricular, la elaboración de materiales didácticos, la investigación didáctica, etc. En los diversos niveles educativos y diferentes especializaciones profesionales, las matemáticas se hallan omnipresentes en la educación, aunque con frecuencia se reproducen en estas instituciones los fenómenos de dominancia y control de la teoría sobre las aplicaciones a los que hemos hecho referencia. Dentro del doble carácter útil-objeto del saber matemático (Douady, 1986) la educación enfatiza con frecuencia los aspectos conceptuales (objetos) frente a las aplicaciones.

Tanto en la enseñanza como en la investigación o las aplicaciones, las matemáticas conviven e interactúan con otros saberes, lo que ha dado lugar a fenómenos de adaptación y surgimiento de nuevos campos o "especies", como por ejemplo, la econometría, psicometría, etc. (Benzecri, 1982). En ellos suelen plantearse nuevos problemas de "competición", especialmente de tipo profesional, de las ciencias originarias sobre las matemáticas. Entre estas adaptaciones, en ocasiones, surgen "deformaciones" o empleos incorrectos. Esto es especialmente notorio en el caso de la Estadística, lo cual ha dado lugar incluso a una línea de investigación sobre esta problemática que recibe el nombre de Etnoestadística (Gephart, 1991)

Otro aspecto conflictivo se refiere a la dificultad de comunicación entre el matemático y el especialista en otras ciencias, de cara a la realización de trabajos en cooperación, debido al empleo de lenguajes científicos diferentes en cada especialidad. Los usuarios de las matemáticas son los que plantean los problemas, pero es el matemático quien tiene las herramientas para su solución. En los procesos de planteamiento del problema al matemático por parte del usuario y de comunicación de las soluciones alcanzadas por el matemático, aparece un doble proceso de transposición didáctica de una a otra materia, en el cual pueden producirse desajustes que perturben la adecuada utilización de las herramientas matemáticas.

En otras ocasiones se espera que la respuesta a un problema matemático sea inmediata, que se responda sobre la marcha, sin una reflexión creativa (Barnett, 1988). En la práctica escolar, cada problema tiene una solución, con frecuencia única, y, en todo caso, el profesor conoce esta solución. La sociedad no valora al profesional matemático porque se entiende que la enseñanza de las matemáticas, desde la escuela a la universidad, debería capacitar a los ciudadanos y distintos profesionales a resolver sus problemas matemáticos. Esto es irreal e impide un "cultivo" idóneo de las matemáticas. Usualmente hay diversas técnicas matemáticas adaptadas para un problema dado. Además, cada una de ellas está basada en una serie de hipótesis de carácter teórico sobre los datos que en la realidad nunca se cumplen de forma exacta. El profesional matemático debe valorar, entre los diversos métodos disponibles, el grado de ajuste entre las hipótesis y los datos disponibles. La modelización matemática es con frecuencia altamente compleja y precisa de una destreza técnica sofisticada, así como un cierto nivel de creatividad. Esto sólo se puede conseguir en sujetos con un cierto nivel de especialización y dedicación profesional.

Por otro lado, la aplicación de muchas técnicas matemáticas rutinarias es hoy día una tarea ímproba, debido a la gran cantidad de información que se necesita procesar en estas aplicaciones. Es imprescindible el recurso al ordenador. Ello plantea de nuevo la "convivencia" con otra ciencia: la informática. La influencia mutua entre ambas disciplinas está llena de potencialidades pero también de interrogantes.

UN EJEMPLO DE ANÁLISIS MICRO-ECOLÓGICO EN MATEMÁTICAS

Un ejemplo de análisis ecológico de objetos matemáticos, desde el punto de vista de la transposición didáctica, es el realizado en la tesis de tercer ciclo de Rajoson (1988), realizada bajo la dirección de Y. Chevallard.

En este trabajo se introducen las nociones claves del análisis ecológico del saber desarrolladas e ilustradas alrededor de las tres preguntas siguientes:

- ¿Porqué el problema de Moivre[2] no aparece en la enseñanza secundaria?
- ¿Porqué el procedimiento de Herón -el algoritmo de Newton- de cálculo de raíces cuadradas vive bien hoy en la noosfera, y no "vive" sino con dificultad y de un modo fugitivo en la clase?.
- ¿Porqué la simetría deslizante -tanto el objeto como el término- no existe apenas en la enseñanza secundaria francesa y, sin embargo, existe bastante bien en la enseñanza inglesa o americana? (ecología diferencial o comparada del saber)

El trabajo se centra en la descripción de los distintos "ecotopos" y "nichos ecológicos" de los objetos matemáticos correspondientes y de las restricciones que determinan su presencia con mayor o menor intensidad de su uso en las distintas formaciones epistemológicas (saber sabio, profesional, didáctico, ...)

Entre las nociones introducidas destacamos el concepto de dominancia. Un

2 "Problema de Moivre": Determinar la probabilidad de obtener una suma de puntos igual a k al lanzar n dados de f caras.

objeto matemático tendrá un carácter dominante si es reconocido como un útil potente, bien adaptado a la resolución de problemas importantes; como consecuencia toma la forma de una teoría. Una teoría puede perder su posición dominante si otra teoría alternativa entra en competición con ella y la hace aparecer como "comida", o sea como una herramienta venida a menos, obsoleta y menos eficaz.

La íntima relación entre los distintos objetos matemáticos, puesta de manifiesto por el hecho de que de un concepto o método precisa de otros más elementales, y a su vez sirve de base para la construcción de otros nuevos queda recogida en la idea de ecosistema y "cadena trófica" (un ser sirve de "alimento" para otros y se alimenta a su vez de otros. La **ecología didáctica** será el estudio de las restricciones tróficas que la enseñanza de un objeto matemático debe satisfacer.

PROBLEMÁTICA DE LA POPULARIZACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

Recientemente se ha acuñado el término de popularización para referirse a un conjunto de actividades cuyo fin es tratar de "salvar el vació entre la ciencia y la comprensión de la misma por el público" (Howson y Kahane, 1990). Se trata de procurar compartir las matemáticas con un público lo más amplio posible, animar a las personas a ser "matemáticamente activos", de inducir un reconocimiento y una actitud favorable hacia la actividad matemática. Los autores citados distinguen el concepto de popularización de la enseñanza de la matemática por sus características específicas:

- se trata de actividades hechas libremente, no sujetas a la "obligatoriedad" de la enseñanza; no suponen un trabajo duro, sino libertad y placer;
- se propone para una audiencia más amplia; debe afectar a todos los colectivos de personas, desde los propios investigadores a los jubilados;
- se procuran utilizar todas las modalidades de comunicación;
- afecta a todos los tópicos matemáticos.

La necesidad de llevar a cabo actividades de popularización surge de la realidad presente de rechazo, aversión y mala imagen que tienen las matemáticas entre el público en general. "La imagen popular de las matemáticas es que es difícil, fría, ultra-racional, importante y fuertemente masculina" (Ernest, 1992). Esta situación es negativa, tanto desde el plano personal como colectivamente. En todos los países se tiene necesidad de incrementar las profesiones de carácter científico y una mala imagen de las matemáticas supone un handicap para ese objetivo.

Las actividades de popularización son interpretables desde la perspectiva de la ecología de los saberes, como intentos de que las matemáticas se utilicen en el seno de instituciones lo más variadas posibles y de un modo adaptado a las características de las mismas. Se trata, por tanto, de promover el uso de las matemáticas en el seno de todos los nichos ecológicos potenciales, mediante las selecciones y adaptaciones necesarias. Se debe proponer a cada colectivo de personas unas actividades matemáticas adecuadas a sus intereses y posibilidades. Esto implica el reconomiento de una mayor variedad de tipos de relaciones al saber matemático que las tradicionales "saber" o "no saber" matemáticas, construidas por los propios sujetos por medio de una gama muy diversa de actividades matemáticas. La popularización surge, por tanto, como emblema de una nueva formación epistemológica, de un nuevo "saber" que "compite", en cierto modo, por el mismo espacio que la Didáctica de la Matemática.

En términos generales, los objetivos de la popularización nos parecen valiosos y necesarios; pero la perspectiva ecológica nos lleva, antes de proponer acciones indiscriminadas, a reflexionar sobre los factores "bióticos" y "abióticos" que determinan la "matofobia". El problema de fondo que trata de remediar la popularización, el rechazo social de las matemáticas, no puede resolverse con el tipo de actividades que se proponen. Comprender las matemáticas es algo tan complejo, conlleva tantos matices y niveles (Sierpinska, 1989) que nos parece ingenuo pretender lograrlo simplemente con las actividades de popularización. El análisis de las condiciones de las que depende una actitud favorable hacia las matemáticas, así como su comprensión por los distintos colectivos de personas, es el objeto de estudio de una disciplina científica: la Didáctica de la Matemática. La dificultad para cumplir estos objetivos es patente si observamos el estado embrionario en que se encuentra esta disciplina en la mayoría de los países.

Parece claro que el fracaso en conseguir desde la escuela el objetivo de la difusión se debe atribuir al modo particular de existencia que la "noosfera educativa" ha sugerido hasta la fecha para las matemáticas escolares, a través de los procesos de transposición didáctica. Sin embargo, las acciones que se proponen como contrapunto para conseguir el objetivo de popularización no parecen claras. ¿Acaso "ver" matemáticas cristalizadas en los productos, ilustrar los libros de texto, proponer pasatiempos y "rompecabezas" en los periódicos, es suficiente para "hacer asequible y grata a una multitud" la actividad matemática?

En nuestra opinión, las acciones de popularización no siempre tienen la orientación adecuada. No siempre es posible hacer amenas las matemáticas ya que no tienen porqué serlo; no es una tarea grata transponer una matriz o desarrollar en serie de potencias una función, como tampoco es ameno y divertido un taladro eléctrico. Hay que crear las situaciones en las que el uso de esos objetos sea lo más razonable: no es necesario hacer popular el martillo para que alguien lo use si tiene que clavar un clavo. A nadie le agrada ser vacunado. Sin embargo, las madres responsables vacunan periódicamente a sus hijos porque saben que la ciencia médica ha demostrado la eficacia de estas vacunas frente a enfermedades con graves consecuencias. En el caso de la medicina, la popularización de la misma no ha consistido en hacerla grata, sino en ponerla al alcance de todos mediante centros de salud y profesionales médicos y dar a conocer su eficacia. Para las matemáticas, el problema clave está en que el alumno (el ciudadano) recibe en la escuela un saber complejo, incomprensible y, además, inútil desde su propia perspectiva.

ALGUNAS PROPUESTAS DE ACCIÓN

Las instituciones de enseñanza (escuelas, universidades, etc.) pueden ser vistas, en esta perspectiva, como hábitat especiales de los saberes, como "semilleros" donde se cultivan estos "organismos", ya que los usuarios de la matemática en los distintos campos de la sociedad reciben su formación en estos centros. Las matemáticas deber ser contextualizadas, adaptadas a las condiciones particulares de estos hábitat; de lo contrario se corre el riesgo de provocar un rechazo generalizado.

Para el desarrollo de una "convivencia simbiótica" de las matemáticas con otros saberes se precisa del desarrollo de un lenguaje común que haga posible el mutuo entendimiento y la comunicación. Esto requiere varios tipos de acciones entre las que resaltamos:

- Una formación de todos los ciudadanos y profesionales que relacione las matemáticas con los problemas de su propio entorno e intereses y le permita distinguir las situaciones en las que precisa la colaboración del experto matemático. La instrucción matemática debe proporcionar a cada ciudadano un sentido para captar situaciones matemáticas y una capacidad para discernir cuando la técnica necesaria para adoptar decisiones precisa la colaboración de un profesional matemático.
- La creación de consultorías matemáticas en el seno de las universidades, en simbiosis con las consultorías informáticas, y quizás también en las instituciones de enseñanza media, que permitirían crear hábitos que

facilitarían la integración y el uso cooperativo de los distintos conocimientos.

- La formación de equipos interdisciplinares en las unidades de investigación y desarrollo, con la presencia de matemáticos en los mismos, es asimismo una acción clave para que las matemáticas se usen intensa y adecuadamente.

Finalmente, consideramos que es fundamental apoyar el desarrollo de los estudios didácticos, ya que estos analizan e identifican las condiciones de las estructuras de sostenimiento (Alley, 1985) de estos "organismos" en las distintas instituciones en las que pueden sobrevivir. La Didáctica, el colectivo de personas que reflexionan crítica y sistemáticamente sobre la producción y comunicación de los saberes, desempeñan el papel de "fertilizantes" para que los saberes desarrollen con plenitud sus potencialidades.

REFERENCIAS

ALLEY, Th. R. (1985). Organism-environment mutuality epistemics, and the concept of an ecological niche. *Synthesis* 65, 411-444.

ALSINA, C. & al. (1989). Hacia unas matemáticas populares. *SUMA*, 4, pp. 83-120

BARNET, V. (1988). Statistical consultancy. A basis for teaching and research. En: R. Davidson y J. Swift (eds). *Proceeding of the second international conference on teaching statistics.* University of Victoria, pp. 303-307.

BENZECRI, J.P. (1982). *Histoire et prehistoire de l'analyse des données*. Paris: Dunod.

BERGER, P. y LUCKMANN, T. (1968). *La construcción social de la realidad*. Buenos Aires: Amorrortu.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel**.** *Seminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. Université Joseph Fourier-Grenoble I.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique***.** Grenoble: La Pensée Sauvage.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n. 2, pp. 5-31

ERNEST, P. (1992). The popular image of mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Newsletter*, nº 4 & 5, p. 19.

GEPHART, R. P. (1988). *Ethnostatistics: qualitative foundations for quantitative research***.** Sage University Paper series on Qualitative Research Methods (Vol. 2). Beverly Hills, CA: Sage.

HOWSON, A. G. y KAHANE, J.P. (1990). *The popularization of mathematics. A study overview*. ICMI Study Series. Camdridge: Cambridge University Press.

LAKOFF, G. y JOHNSON, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago.

MORIN, E. (1992). *El método. Las ideas*. Madrid: Cátedra (orig. francés, Editions du Seuil, 1991).

PATTEN, B.C. & AUBLE, G.T. (1980). System approach to the concept of niche. *Synthese 43, 155-181.*

RAJOSON, L. (1988). *L'analyse ecologique des conditions y des contraintes dans l'etude des phenomenes de transposition didactique: trois etudes de cas.* Thèse 3eme Cicle. Faculté des Sciences de Luminy. Université d'Aix Marseille II.

SIERPINSKA, A. (1990). Some remarks on understandign in mathematics. *For the Learning of Mathematics 10, 3, p. 24-36.*

TOULMIN, S. (1977). *La comprensión humana (I). El uso colectivo y la evolución de los conceptos***.** Madrid: Alianza (ed. orig. inglesa de 1972).

WHITE, L.A. (1983). *La ciencia de la cultura. Un estudio sobre el hombre y la civilización***.** Barcelona: Paidos.

5

EPISTEMOLOGÍA E INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA: IMPLICACIONES PARA EL DESARROLLO CURRICULAR[1]

Juan D. GODINO, Carmen BATANERO y V. NAVARRO-PELAYO

Resumen

Las tendencias recientes en filosofía de las matemáticas reconocen un triple carácter en esta disciplina: las matemáticas como quehacer humano, comprometido con la resolución de cierta clase de situaciones problemáticas; las matemáticas como lenguaje simbólico y como un sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido, emergente de la actividad de matematización. La instrucción matemática debe ser coherente, por tanto, con este triple carácter, tanto en la organización general del currículo, como en la planificación de las actuaciones del profesor en el aula. En este trabajo se analiza esta problemática, presentando el diseño de un currículo para la enseñanza de la combinatoria en los niveles de secundaria concordante con los supuestos epistemológicos explicitados.

1. RELACIONES ENTRE LAS MATEMÁTICAS Y SUS APLICACIONES

Aunque la epistemología o teoría del conocimiento se refiere a una rama de la filosofía que parece muy alejada de los intereses prácticos del profesor, sin embargo, se está reconociendo la importancia que tiene una visión adecuada de la naturaleza de las matemáticas como condicionante de los distintos modelos de instrucción, así como de la actuación de los profesores

---

[1] [Epistemology and mathematics instruction: Implications for curricular development]. En, L. Bazzini (Ed.), *Proceedings of the V Conference on Systematic Cooperation between Theory and Practice* (pp. 15-26). University of Pavia, 1995.

en clase (Dossey, 1992). Si se piensa, por ejemplo, que los objetos matemáticos tienen una existencia idealista, independiente del sujeto y de la realidad a la que se aplican, e incluso de la cultura, entonces quedaría justificada una instrucción basada en la presentación formal de estos objetos, los cuales estarían determinados por sus definiciones y enunciados respectivos. Las aplicaciones, los problemas matemáticos, serían, en esta concepción, un apéndice que se trataría después de que el alumno ya ha aprendido las matemáticas y en cierto modo serían un "adorno". En gran medida, la práctica de la enseñanza de las matemáticas en los últimos años ha estado dominada por esta concepción.

Por el contrario, si se considera que las matemáticas son una construcción humana que surge como consecuencia de la necesidad y curiosidad del hombre por resolver cierta clase de problemas o disposiciones del entorno; que, asimismo, en la invención de los objetos matemáticos tiene lugar un proceso de negociación social y que estos objetos son falibles y sujetos a evolución, entonces el aprendizaje y la enseñanza debe tener en cuenta estos procesos. Esta última es la posición de las teorías psicológicas constructivistas, que están apoyadas en un constructivismo social como filosofía de las matemáticas, tal y como es descrito por Ernest (1991).

Esta dicotomía entre idealismo-formalista y constructivismo es bien descrita, para el caso de la combinatoria, por Kapur (1970), quién en plena efervescencia de la "matemática moderna" abogaba por un desarrollo del currículo matemático que reconociera el papel esencial de las aplicaciones en el propio crecimiento de las matemáticas y, por tanto, también en su enseñanza - aprendizaje. En el trabajo mencionado, Kapur presenta una colección de problemas combinatorios cuyo tratamiento escolar permitiría sofocar el movimiento reformista que trataba de implantar un "baby Bourbaki" como texto de enseñanza de las matemáticas pre-universitarias, en consonancia con el Bourbaki universitario. La actualidad de estas ideas, después de la resaca modernista, parece bien evidente.

Kapur, en el artículo citado, describe dos concepciones extremas sobre las relaciones entre las matemáticas como disciplina científica, sus aplicaciones y el papel de éstas en los procesos de enseñanza-aprendizaje. La primera de estas concepciones es sostenida principalmente por matemáticos profesionales que creen que se deben construir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de una manera axiomática, rigurosa, abstracta y lógica, y después superponer sobre estas las estructuras de las aplicaciones. Según esta visión no se puede resolver ninguna aplicación, que no sea trivial, si antes no se ha dado un buen fundamento matemático. La matemática pura y la aplicada forman pues dos disciplinas distintas y las estructuras del pensamiento puro deben preceder a las estructuras de la Naturaleza y la Sociedad. Las aplicaciones de las matemáticas serían un "apéndice" en el libro de las matemáticas, de modo que no se producirían ningún perjuicio si este apéndice no es tenido en cuenta por el estudiante. Las personas que sostienen esta postura piensan que la matemática (en singular) es una disciplina autónoma que puede mantener intacta su vitalidad solamente mediante pura endogamia.

Bajo los supuestos de esta concepción "idealista-platónica" de las matemáticas se puede construir un currículo casi perfecto, estéticamente satisfactorio ya que tiene que tratar de un dominio de pensamiento puro, imperturbado y purificado del "ruido" del mundo externo, el cual ha sido filtrado por el proceso de abstracción. El texto de Bourbaki se presenta como el modelo ideal de currículo de matemática universitaria.

Siguiendo con la exposición de Kapur (1970), una segunda concepción sobre las matemáticas considera, por el contrario, que las matemáticas y sus aplicaciones deben mantenerse en íntima relación a lo largo del currículo. Piensan que los estudiantes deberían ver la necesidad de cada segmento particular de matemáticas antes de que le sea presentado (o incluso mejor, antes de que los estudiantes lo creen por sí mismos) y deberían ser capaces de ver cómo las matemáticas creadas satisfacen la necesidad sentida al principio. Según esto, las aplicaciones de las matemáticas, tanto externas como internas, deberían preceder y seguir a la creación de las matemáticas; éstas deben aparecer como una respuesta natural y espontánea de la mente y el genio humano al entorno físico, biológico y social en que el hombre vive. Los estudiantes deben ver, por sí mismos, que la axiomatización, la generalización y la abstracción de las matemáticas son necesarias con el fin de comprender los problemas de la Naturaleza y la Sociedad. A las personas partidarias de esta visión de las matemáticas y su enseñanza les gustaría poder aislar algunas estructuras fundamentales de la Naturaleza y la Sociedad y construir las estructuras fundamentales de las matemáticas alrededor de estos conceptos, de modo que tuviera lugar una imbricación más o menos perfecta entre ellas.

La elaboración de planes de formación matemática de acuerdo con la concepción constructivista es compleja. Las estructuras de las ciencias físicas, biológicas, sociales son relativamente más complejas y el reconocimiento del isomorfismo de estas estructuras con las estructuras puramente matemáticas no es fácil. Hay una abundancia de material disperso que debe ser seleccionado, pero la tarea de selección e integración, así como la coordinación con otras restricciones del sistema de enseñanza no son fáciles de lograr. "Los miembros de este segundo grupo se enfrentan a una tarea realmente desafiante. Tienen que producir un pensamiento productivo y ofrecer alternativas concretas" (Kapur, 1970; p. 113)

2. LAS MATEMÁTICAS COMO QUEHACER HUMANO, LENGUAJE SIMBÓLICO Y SISTEMA CONCEPTUAL

Teniendo en cuenta las tendencias recientes de la filosofía de las matemáticas, presentadas por autores como Tymoszko (1986) y Ernest (1991), que sintetizan las posiciones de autores como Witgenstein y Lakatos, consideramos necesario distinguir en las Matemáticas al menos tres aspectos esenciales mutuamente imbricados, que deben ser tenidos en cuenta en la organización de su enseñanza:

a) Las matemáticas constituyen una actividad de resolución de situaciones problemáticas de una cierta índole, socialmente compartida; estas situaciones problemáticas se pueden referir al mundo natural y social o bien pueden ser internas a la propia matemática; como respuesta o solución a estos problemas externos o internos surgen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías, etc.).

b) Las matemáticas son un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones- problemas y las soluciones encontradas; al igual que la música son un lenguaje universal en el que los signos empleados, su semántica y sintaxis son compartidos en los diferentes grupos humanos; como todo lenguaje implica unas reglas de uso que hay que conocer y su aprendizaje ocasiona dificultades similares al aprendizaje de otro lenguaje no materno.

c) Las matemáticas constituyen un sistema conceptual, lógicamente organizado y socialmente compartido; la organización lógica de los conceptos, teoremas y propiedades explican también gran número de las dificultades en el aprendizaje; un sistema no puede reducirse a sus componentes aislados, ya que las interrelaciones entre los mismos son una parte esencial. Surge así una paradoja en la enseñanza de las matemáticas: Cada concepto no puede enseñarse adecuadamente en forma aislada de otros conceptos; tampoco pueden enseñarse los diferentes conceptos simultáneamente; en consecuencia, cabría pensar que no es posible su enseñanza. Este problema se resuelve, al menos parcialmente, con la consideración del currículo "en espiral"; cada concepto es tratado varias veces a lo largo de la enseñanza, las primeras veces de modo implícito; progresivamente se va tomando como objeto de estudio en sí mismo, aumentando el grado de complejidad y completitud en su estudio.

Las matemáticas constituyen, por tanto, una *realidad cultural* constituida por conceptos, proposiciones, teorías, etc. (los objetos matemáticos) y cuya significación personal e institucional está íntimamente ligada a los sistemas de prácticas realizadas para la resolución de las situaciones-problemas (Godino y Batanero, 1993).

Como ingredientes característicos de la actividad de matematización (Freudenthal, 1991) podemos destacar la representación simbólica, la búsqueda de lo esencial entre los distintos contextos, situaciones, problemas o procedimientos, la generalización, axiomatización, validación, etc.

3. CONOCER Y APRENDER MATEMÁTICAS: SU RELACIÓN CON LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Como consecuencia de esta conceptualización del conocimiento matemático objetivo, "conocer" o "saber" matemáticas, por parte de una persona, no puede reducirse a identificar las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos. Debe implicar ser capaz de usar el lenguaje y el sistema conceptual matemático en la resolución de problemas. Un sujeto no puede atribuir un sentido pleno a los objetos matemáticos a menos que éstos se relacionen con la actividad de la que indisolublemente emergen.

En consecuencia, la actividad realizada con el fin de resolver problemas es uno de los pilares del aprendizaje significativo de las matemáticas. La resolución de problemas no debe considerarse como un nuevo contenido a añadir al currículo matemático, como un apéndice de la enseñanza tradicional. Esta actividad es uno de los vehículos esenciales del aprendizaje de las matemáticas, además de una fuente de motivación intrínseca hacia la misma, ya que permite contextualizar y personalizar los conocimientos. Permite, asimismo, atribuir significado a las prácticas de índole matemática realizadas, mediante el reconocimiento de una finalidad o intención en las mismas (Godino y Batanero, 1993).

De acuerdo con Brousseau (1986) el trabajo intelectual del alumno debe ser en ciertos momentos comparable al de los propios matemáticos: el alumno debería tener oportunidad de investigar sobre problemas a su alcance, formular, probar, construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías, intercambiar sus ideas con otros, reconocer las que son conformes con la cultura matemática, adoptar las ideas que le sean útiles. Por el contrario, el trabajo del profesor es en cierta medida inverso del trabajo de matemático profesional: debe producir una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos, ya que debe buscar las mejores situaciones que den sentido a dichos conocimientos y ayudar al alumno en la búsqueda de las soluciones, las cuales serán sus propios conocimientos.

La dimensión cultural del conocimiento matemático es tenida en cuenta en la epistemología descrita por Brousseau, al proponer que el profesor debe ofrecer a los alumnos los medios de encontrar lo que es el "saber cultural" que se le quiere enseñar. Los alumnos deben, a su vez, redescontextualizar y redespersonalizar su saber de modo que identifiquen su producción con el saber que se usa en la comunidad científica y cultural de su época.

Esta formulación del aprendizaje matemático se corresponde con las teorías constructivistas, ampliamente asumidas, como lo prueba su inclusión en documentos curriculares de tan amplia difusión como son las publicaciones recientes del National Council of Teachers of Mathematicas (U.S.A.): "El aprendizaje debe venir guiado por la búsqueda de respuestas a problemas -primero a un nivel intuitivo y empírico; más tarde generalizando; y finalmente justificando (demostrando)" (NCTM, 1989) Queda, no obstante, notablemente enriquecida al tener en cuenta los procesos sociales y de enculturación del conocimiento matemático, así como el papel instrumental de los conceptos y procedimientos matemáticos elaborados a lo largo de la historia.

4. INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA: NECESIDAD DE UNA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

Como se ha indicado, en términos generales, nuestra concepción de las matemáticas y su aprendizaje se sitúa en la posición constructivista. No obstante, consideramos que el aprendizaje de conceptos científicos complejos, en adolescentes y personas adultas, no sigue solamente las pautas del constructivismo individualista en sentido estricto, por lo que habrá que indagar sobre la aplicación, a la enseñanza de las matemáticas, de teorías cognitivas del aprendizaje más integradoras, como las de Vigotsky y Ausubel, y los planteamientos didácticos de educadores matemáticos como Freudenthal (1991), con su propuesta metodológica para la enseñanza de las matemáticas que denomina "reinvención guiada", o la Teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986).

Una interpretación ingenua del constructivismo conduce a atribuir un papel limitado a la enseñanza, esto es, al trabajo del profesor en su labor de facilitar el aprendizaje; esta quedaría reducida a la selección de situaciones problemáticas significativas para los alumnos.

Como se ha indicado, las matemáticas no constituyen solamente una actividad sino también son un lenguaje simbólico y un sistema conceptual lógicamente organizado, aunque no en una jerarquía estricta de niveles de abstracción y complejidad. Si consideramos el aprendizaje de una lengua, aunque la práctica en la conversación desde el comienzo del aprendizaje sea una cuestión fundamental, si queremos lograr un aprendizaje funcional que permita la comunicación, el progreso conseguido, una vez superada la etapa inicial, es muy escaso si no se realiza un estudio sistemático de la gramática de dicha lengua.

Por otro lado, disponemos de todo un sistema conceptual previo, herencia del trabajo anterior de las mentes matemáticas más capaces, que nos proporcionan la solución de un sinnúmero de problemas. Esta herencia quedaría desaprovechada si cada estudiante tuviese que redescubrir por si mismo todos los conceptos que se le tratan de enseñar. La ciencia, y en particular las matemáticas, no se construye en el vacío, sino sobre los pilares de los conocimientos construidos por nuestros predecesores. El fin de la enseñanza de las matemáticas no es sólo capacitar a los alumnos a resolver los problemas cuya solución ya conocemos, sino prepararlos para resolver problemas que aún no hemos sido capaces de solucionar. Para ello, hemos de acostumbrarles a un trabajo matemático auténtico, que no sólo incluye la solución de problemas, sino la utilización de los conocimientos previos en la solución de los mismos.

Consideramos, en consecuencia, que las teorías asociacionistas del aprendizaje (Ausubel y cols., 1983) aplicadas a la formación de conceptos y al conocimiento de ciertas relaciones y representaciones puede lograrse de un modo eficaz con la ayuda de las explicaciones del profesor y la interacción social en el aula, añadida a la actividad de resolución de problemas.

La atención sistémica a los tres aspectos o dimensiones de las matemáticas (actividad, lenguaje, red conceptual) está en la base, según nos parece a nosotros, de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986), quien propone el diseño de situaciones de formulación/ comunicación, validación e institucionalización como complementos imprescindibles de las situaciones de acción o investigación. El tipo de discurso, o sea la comunicación oral o escrita en el aula, realizada por el profesor y los alumnos es un aspecto central determinante de lo que los alumnos aprenden sobre matemáticas. Si el núcleo de la comunicación solo se produce por el profesor hacia los alumnos, de forma escrita a través de la pizarra, los alumnos aprenderán unas matemáticas distintas, y adquirirán una visión diferente de las matemáticas, que si tiene lugar una comunicación más rica entre profesor y alumnos y entre éstos entre sí.

Además, las situaciones de acción deben estar basadas en problemas genuinos que atraigan el interés de los alumnos a fin de que los asuman como propios y deseen resolverlos; constituyen un primer encuentro de los alumnos con los objetos matemáticos implícitos, en el que se les ofrece la oportunidad de investigar por sí mismos posibles soluciones, bien individualmente o en pequeños grupos.

La Teoría de Situaciones Didácticas formulada por Brousseau constituye, desde nuestro punto de vista, una teoría del aprendizaje organizado de las matemáticas, esto es, una teoría de la instrucción matemática, en consonancia con los presupuestos epistemológicos y psicológicos expresados anteriormente. Describe un entorno de aprendizaje potente en el que no sólo se presta atención al saber matemático puesto en juego en las tareas, sino también a las actividades de comunicación en el aula, todo ello en una secuencia organizada de situaciones didácticas.

5. IMPLICACIONES PARA EL DESARROLLO CURRICULAR: EL CASO DE LA COMBINATORIA EN SECUNDARIA

La perspectiva de las matemáticas y de su enseñanza esbozadas en los apartados anteriores tiene que tener consecuencias sobre el diseño de planes de educación matemática, esto es, en el currículo matemático, entendido este como un "plan operativo que detalla qué matemáticas necesitan conocer los alumnos, qué deben hacer los profesores para conseguir que sus alumnos desarrollen sus conocimientos matemáticos y cuál debe ser contexto en el que tenga lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje" (N.C.T.M. (1989).

Vamos a sintetizar, a continuación, los supuestos pedagógicos que consideramos deben guiar la elaboración de propuestas curriculares para la educación matemática, que consideramos coherentes con los presupuestos epistemológicos explicitados:

1) El fin primordial de la acción del profesor en el aula es ayudar a los alumnos a desarrollar el razonamiento matemático, la capacidad de resolución de problemas, de formulación y comunicación de ideas matemáticas y el establecimiento de relaciones entre las distintas partes de las matemáticas y restantes disciplinas. Asimismo, es prioritario favorecer una buena disposición hacia las matemáticas y su quehacer.

2) Se debe prestar una atención especial a la organización de la enseñanza y el aprendizaje: lo que los alumnos aprenden depende fundamentalmente de cómo se lleva a cabo este aprendizaje. Este supuesto implica, además de una cuidadosa selección de las tareas, el diseño de situaciones didácticas que proporcionen oportunidades a los alumnos de indagar personalmente problemas significativos para ellos y relevantes desde el punto de vista matemático, a formular hipótesis y conjeturas, utilizar diversos tipos de representaciones; a validar sus soluciones y comunicarlas a otros, dentro de un clima cooperativo y de discusión científica.
3) Hay que llevar al alumno al reconocimiento progresivo del grado de desarrollo actual de las matemáticas, como conjunto de conocimientos y de su aplicabilidad en distintas ramas de la actividad humana. El fin perseguido es la asimilación progresiva del conocimiento matemático por los alumnos, esto es, la construcción de una red de conceptos y procedimientos, así como el dominio del lenguaje matemático, en consonancia con el conocimiento matemático objetivo. Con dicho fin se deben diseñar situaciones específicas de institucionalización de los conocimientos pretendidos.
4) Un currículo flexible adaptado a las capacidades de los distintos alumnos. Los objetivos de aprender a realizar conjeturas y argumentos, formular y resolver problemas, o sea, el aprendizaje significativo de las matemáticas, debe alcanzar a todos los alumnos. Para ello se deben proponer situaciones problemáticas introductorias sobre las que toda la clase puede trabajar, pero, además, se deben proporcionar actividades de desarrollo y sugerencias para los alumnos más capacitados.
5) La observación continuada de los procesos de enseñanza- aprendizaje debe ser la principal estrategia evaluadora de los mismos.

Elementos de un diseño curricular para la enseñanza del análisis combinatorio

A título de ejemplo, describimos, a continuación, los principales elementos de una propuesta de desarrollo curricular sobre un tópico matemático, la Combinatoria, presentada con detalle en Batanero y cols. (en prensa). La organización general de este currículo tiene en cuenta la estructura del campo conceptual y procedimental de la Combinatoria, el campo de problemas correspondiente que dan sentido a los mismos, así como los aspectos representacionales y simbólicos. Las actitudes matemáticas y la apreciación del quehacer matemático por parte de los alumnos se lograrán como consecuencia del diseño global del currículo y de las relaciones personales y afectivas que el profesor cultive en el aula.

En España, la enseñanza de la Combinatoria ha estado aislada del resto de los temas del currículo matemático, excepto de su relación con la probabilidad. Esta enseñanza se ha centrado en el aprendizaje de fórmulas combinatorias y en la realización de ejercicios de cálculo de expresiones combinatorias, o en la identificación de la operación combinatoria contenida en un enunciado verbal. Posiblemente debido a este planteamiento, el tema ha sido considerado como uno de los más difíciles por los profesores, quienes con frecuencia, han preferido omitir su enseñanza. Incluso, en los nuevos diseños curriculares (MEC, 1992), el tema se ha suprimido prácticamente, siendo reducido a una tímida mención al conteo y a los diagramas en árbol dentro del bloque de la probabilidad. Algunas comunidades autónomas, como Andalucía, propone mantener la enseñanza de la Combinatoria, aunque manteniendo la orientación tradicional.

Estas propuestas contrastan con las presentadas en los "Estándares" del NCTM (1989), en los que se afirma que el razonamiento combinatorio es una herramienta útil en los esquemas cognitivos de los estudiantes puesto que es la base de la matemática discreta, cuya enseñanza se reclama por numerosas propuestas curriculares (Kenney y Hirsch, 1991). Al mismo tiempo, los problemas combinatorios constituyen un medio excelente para que los estudiantes realicen actividades de matematización, dar significado a otras herramientas conceptuales básicas y relacionar entre sí varias ramas de las matemáticas. Finalmente, se debe recordar que la capacidad combinatoria es considerada por Inhelder y Piaget (1955) como un constituyendo fundamental del razonamiento formal y que Fischbein (1975) señala la necesidad de estimular el desarrollo psicoevolutivo del razonamiento combinatorio mediante una instrucción apropiada.

Por las razones descritas, una primera elección en la elaboración del currículo propuesto es su distribución a lo largo de un prolongado período de tiempo, proponiendo unidades didácticas desde los últimos años de educación primaria (10-11 años) hasta el final de la secundaria no obligatoria (17-18 años). Los conceptos y procedimientos se presentan cíclicamente, incrementando progresivamente la profundidad del estudio. En lugar de limitarnos a las clásicas unidades sobre variaciones, combinaciones y permutaciones, el análisis combinatorio elemental se presenta estructurado de acuerdo con tres modelos específicos que permiten resolver una gran cantidad de problemas combinatorios, tanto simples como complejos: los modelos de muestreo, colocación de objetos en urnas y partición de conjuntos. La potencia de los procedimientos combinatorios se presenta también con referencia a las sucesiones recurrentes, métodos lógicos, grafos y árboles, etc., que se usan para conectar el tema con la matemática discreta, de la que el análisis combinatorio es un núcleo central.

Consideramos que el currículo matemático debe atender a la estructura de los campos conceptuales y procedimentales correspondientes, su interdependencia con los campos de situaciones-problemas prototípicas de los cuales emergen y a las peculiaridades del lenguaje simbólico matemático. Asumiendo esta idea de currículo y teniendo en cuenta los supuestos epistemológicos y pedagógicos enunciados en las secciones anteriores, un currículo coherente para la enseñanza de la Combinatoria debe incluir los siguientes elementos:

a) Una muestra de problemas combinatorios en los que están sistemáticamente representados los distintos tipos de problemas y situaciones de uso y las variables de tarea correspondientes, clasificados según niveles de complejidad. Para cada núcleo temático en que se ha dividido la enseñanza de la Combinatoria (Anexo 1) hemos seleccionado una secuencia de situaciones - problemas que, desde nuestro punto de vista, dan sentido a dicho núcleo conceptual o procedimental, teniendo en cuenta el mostrar a los alumnos la gama de diversas aplicaciones de la combinatoria y sus conexiones con otras nociones matemáticas. El anexo 2 contiene los distintos tipos de problemas y su distribución en las unidades. El anexo 3 describe los contextos de aplicación incorporados en la colección de problemas.

b) Los conceptos, modelos y técnicas combinatorias elementales, que emergen y adquieren sentido a través de la muestra de situaciones-problemas y que delimitan el conocimiento matemático objetivo del análisis combinatorio elemental. Los anexos 3 y 4 contienen los distintos modelos combinatorios y procedimientos, respectivamente, y su distribución en las unidades.

Elementos para la programación de aula

En el texto citado de Batanero y cols. (en prensa) se proporciona a los profesores de secundaria información básica para el diseño de unidades didácticas en consonancia con los supuestos pedagógicos descritos. Proponemos que cada unidad se organice alrededor de un contenido matemático específico (enumeración sistemática, regla del producto, etc.), que es el concepto o procedimiento cuyo aprendizaje se pretende de modo más específico. Esto no quiere decir que este objeto matemático se trate sólo en dicha unidad, ni que aparezca aislado. Muy al contrario, en cada unidad se "trabajará" con un rico "enjambre" de objetos, la mayor parte de una manera implícita, o sea como herramientas conceptuales que intervienen en la resolución de los problemas. Además, el contenido pretendido en una unidad será usado y relacionado con otros en distintas unidades, lo que complementa su significación.

La información que proporcionamos al profesor sobre cada unidad como orientaciones metodológicas (no prescripciones, aunque a veces indiquemos "se debería ..."), pueden ser útiles para la elaboración de sus proyectos curriculares de aula sobre el tema de combinatoria. Esta información se ha estructurado en los cuatro apartados que describimos a continuación.

a) Descriptores de la unidad:

Aquí indicamos el nivel de enseñanza para el cual se propone, los objetivos prioritarios pretendidos, los contenidos (conceptos, propiedades y procedimientos) que desglosan el contenido indicado en el título de la unidad, los requisitos previos que, en cuanto a conocimientos, los alumnos deben satisfacer para el desarrollo de la unidad y el material manipulativo cuando se precisa alguno.

b) Situaciones, problemas y ejercicios.

En este apartado proporcionamos una colección de enunciados de "situaciones problemáticas" en torno de las cuales debería girar la actividad de la clase y el discurso del profesor y de los alumnos. Estas actividades las clasificamos en tres grupos:

1) Situaciones introductorias.
2) Situaciones complementarias.
3) Ejercicios y aplicaciones.

En las situaciones introductorias y complementarias se proponen actividades en las cuales interviene específicamente el contenido pretendido en la unidad. En ellas se describen situaciones sobre las cuales se plantean varias cuestiones. Constituyen, por tanto, las consignas iniciales para generar en la clase un entorno que promueva el interés de los alumnos (así al menos lo deseamos) y la actitud investigadora de los mismos.

Las diversas situaciones y cuestiones atienden a distintas variables de tarea y niveles de complejidad del contenido pretendido. Por tanto, pueden ser usadas para tener en cuenta la diversidad de capacidades de los alumnos.

Aunque inicialmente todos los alumnos puedan trabajar sobre una misma situación introductoria, las cuestiones más complejas y las situaciones complementarias pueden ser propuestas a los alumnos más aventajados.

Los enunciados de los "ejercicios y aplicaciones" responden a la necesidad de que los alumno adquieran un cierto dominio de las técnicas introducidas y las apliquen a nuevas situaciones.

c) Análisis de los contenidos y de la gestión de la clase

Como se ha indicado, la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) que nos sirve de referencia resalta el papel de las situaciones de acción para que los alumnos doten de sentido a las nociones y procedimientos matemáticos. Pero es ingenuo pensar que "echando" problemas más o menos ingeniosos a los alumnos, éstos van a reinventar todas las matemáticas. Así pues, tras de cada situación de acción, en la que los alumnos han tratado de encontrar y de formular las respuestas pertinentes (trabajando por grupos, preferentemente) es necesario organizar situaciones (o momentos) de comunicación de los resultados y de argumentación o validación de las soluciones propuestas.

De este modo se habrá logrado crear unas condiciones propicias para el momento o situación de institucionalización de los conocimientos pretendidos, con el grado de formalización que el profesor juzgue pertinente según el desarrollo de las situaciones previas y el nivel particular de los alumnos. Asimismo, el profesor deberá hacer referencia a otros objetos matemáticos ya conocidos por los alumnos y a problemas previamente trabajados; esto es, ayudará al establecimiento de conexiones matemáticas.

Todo este trabajo del profesor encierra una notable complejidad y es de suma importancia, ya que pequeños cambios en la gestión de la clase (en el orden de presentación de las cuestiones, sugerencias que proporcione a los alumnos en momentos claves de los procesos de resolución, y en el grado de formalización que finalmente exponga) condiciona el aprendizaje logrado por los alumnos.

Con el fin de tratar de ayudar al profesor en esta delicada labor hemos incluido en la sección que denominamos "análisis de los contenidos y de la gestión de la clase" algunas indicaciones sobre posibles conexiones matemáticas y el tipo de institucionalización deseable.

d) Soluciones de las situaciones, problemas y ejercicios.

Aunque creemos que los profesores a los que va dirigido el libro citado están capacitados para resolver las cuestiones que se proponen en las distintas unidades hemos creído conveniente ofrecer la solución de las mismas. En algunos casos porque la resolución puede requerir un tiempo excesivo del que el profesor no dispone habitualmente. Además, sólo mediante un examen pormenorizado de los posibles procesos de resolución se pueden apreciar los conceptos y procedimientos matemáticos que se despliegan en los mismos.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos explicitado nuestra concepción acerca de la naturaleza de las matemáticas, así como las consecuencias instruccionales que, según nuestro criterio, se derivan de la misma. Creemos que la atención a los tres aspectos del conocimiento matemático (quehacer, lenguaje, sistema conceptual) en los procesos de enseñanza-aprendizaje hace más compleja la labor de los profesores en las aulas, por lo que se precisa el desarrollo de materiales curriculares que, sin sofocar su necesaria creatividad, hagan viable la renovación de la educación matemática. La selección de situaciones problemáticas prototípicas precisa de un conocimiento profundo del campo de problemas y del contenido correspondiente, que normalmente no está al alcance de los profesores. Frecuentemente, el discurso psico-pedagógico ignora las complejidades del contenido de enseñanza, reclamando del profesor tareas que no están a su alcance, exigiéndole que aplique a su práctica cotidiana análisis que requieren un tiempo y unos conocimientos teóricos que no están a disposiciones de los profesores. La investigación didáctica debe aportar soluciones prácticas a estos problemas. La elaboración de textos para la formación inicial y permanente de profesores como el descrito puede ser una contribución significativa para este fin.

Reconocimiento

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por la DGICYT, Proyecto PS91-0114.1

REFERENCIAS

AUSUBEL, D.P.; NOVAK, J.D. y HANESIAN, H. (1983). Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo (2, ed.). México: Trillas.

BATANERO, M.C.; GODINO, J.D. y NAVARRO-PELAYO, V. (en prensa). Razonamiento combinatorio. Madrid: Síntesis.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, n. 2, p. 33-115.

DOSSEY, J.A. (1992). The nature of mathematics: its role and its influence. En D.A. Grouws (E.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan.

ERNEST, P. (1991). The philosophy of mathematics education. London: The Falmer Press.

FISCHBEIN, E. (1975). The intuive sources of probabilistics thinking in children. Dordrecht: D. Reidel.

FREUDENTHAL, H. (1991). Revisiting mathematics education. London: The Falmer Press.

GODINO, J.D. y BATANERO, C. (1993). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

KAPUR, J.N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. Educational Studies in Mathematics, vol. 3, p. 111-127.

KENNEY, M. J. & HIRSCH, C. R. (1991). Discrete mathematics across the curriculum, K-12. 1991 Yearbook. Reston: VA: N.C.T.M.

M.E.C. (1992). Matemáticas. Secundaria obligatoria. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

N.C.T.M. (1989). Curriculum and evaluation standard for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

PIAGET, J. & INHELDER, B. (1951). La genèse de l'idèe de hasard chez l'enfant. Paris: Press Universitaires de France.

TYMOCZKO, T. (ed.) (1986). New directions in the philosopy of mathematics. Boston: Kirkhauser.

ANEXOS

Anexo 1. *Relación de unidades didácticas*

ENSEÑANZA PRIMARIA	ENSEÑANZA SECUNDARIA (2º ciclo)
1. Enumeración sistemática 2. Regla del producto y diagramas en árbol	6. Muestras ordenadas. Variaciones. 7. Permutaciones. Números factoriales. 8. Muestras no ordenadas. Combinaciones
ENSEÑANZA SECUNDARIA (1er ciclo)	**BACHILLERATO**
3. Grafos. Regla de la suma 4. Modelo de colocaciones. Caso de objetos distinguibles 5. Modelo de colocaciones. Caso de objetos indistinguibles	9. Colocación y distribución de objetos 10. Subpoblaciones y particiones. Números combinatorios 11. Principio de inclusión y exclusión. Otros métodos lógicos 12. Procedimientos analíticos. Funciones generatrices.

Anexo 2. *Clasificación de los problemas combinatorios*

UNIDADES	
Por la solución pedida: - Existencia 3,4,11,7 - Enumeración 1,2,3,4,5,6,7,9,11,12 - Recuento todas - Clasificación 1,4,9,11,6 - Optimización 3,4,9 - Propiedades de los números combinatorios y manip. algebraicas 7,8,9,10,11,12 **Por el número de operaciones combinatorias:** - simple todas - compuesto 2,4,6,7,8 y sig. **Por el modelo combinatorio implícito en el enunciado:** - selección, 1,2,3,6,7,8,10,11 - colocación, 1,2,4,5,7,9,10,11 - partición, 1,5,9,10,11 - ordenación, 1,4,7	**Por el tipo de objetos que se combina:** - personas, 1,2,3,4,5,6,7,9 - números, 1,2,3,4,5,6,9, 10,11 - letras, 4,6,7 - objetos, ... 1,2,3,4,5,6,7,8, 9,11 **Por el tamaño de los parámetros y si son variables:** - pequeños todas - grandes 4,6,7,9,11 - no variables todas - variables 6,7,8,9,10,11,12

Anexo 3. Contextos de aplicación

Contexto	UNIDADES
Probabilidad:	
- Enumeración de posibilidades	1,3,6,11
- Aplicación de la regla de Laplace	4,6,8,11
- Distribuciones discretas de probab.	4,8,12
- Caminatas aleatorias	
- Números aleatorios; aleatoriedad	4,6
- Coincidencias	4,6,11
Estadística:	
- Cálculo de momentos	12
- Diseño de experimentos	12
- Muestreo	5,6,7,11
Geometría:	
- Recubrimientos planos	7
- Figuras geométricas	1,8,10,11
- Intersecciones, retículas	1,8
- Composición de figuras	4
Teoría de números:	
- Números figurados	8,11
- Descomposición de un entero en sumandos	5,10,12
- Numero de divisores de un entero;	4,7,10,11
- divisibilidad	
- Sistemas de numeración	1,2,6,10,11
- Aritmética modular	10
- Números enteros	6
- Otros	7,9,11
Algebra:	
- Grupos de permutaciones; grupos cíclicos	7,10,11
- Potencia del binomio; trian. de Pascal	10,11,12
- Determinantes	
- Ecuaciones con soluciones enteras	5,10
- Matrices	9
- Funciones polinómicas; desarr. serie	12
- Teoría de conjuntos; aplicaciones	8,9,10,11
Biología:	
- Transmisión de caracteres hereditarios	8
- Código genético	11
Física:	
- Teoría cinética de los gases	5
Química:	
- Enumeración de isómeros	11
Teoría de grafos:	
- Caminos, circuitos, trayectorias	3,4,6,7,8
- Colorear vértices, aristas, regiones	9,12
Matemática recreativa y juegos:	
- Cuadrados mágicos	4
- Arte, dibujo, manualidades	1,2,3,5
- Pasatiempos numéricos	1,2,3
- Dominós	9
- Ajedrez	7,9
- Otros	1,2,4,5,9
Ciencias de la computación:	
- Almacenamiento de la información	6
- Códigos y lenguajes	2,5,6,7
- Algoritmos	5
Investigación Operativa:	
- Determinación de rutas; transporte	3,7,8
- Asignaciones	3,6,9,12

Anexos 4 y 5.

UNIDADES

Modelos combinatorios *(anexo 4)*	Procedimientos combinatorios *(anexo 5)*
1. Modelo de selección: - Población y muestra 6,7,8 *Muestreo ordenado con reemplazamiento:* - Variaciones con repetición 6,7 *Muestreo ordenado sin reemplazamiento:* - Variaciones; Permutaciones 6,7 - Permutaciones con repetición 7 - Permutaciones circulares 7 *Muestras no ordenadas con reemplazamiento:* - Combinaciones con repetición 8 *Muestras no ordenadas sin reemplazamiento:* - Combinaciones 8 **2. Modelo de colocación/asignación: aplicaciones** *Colocación de objetos distinguibles en casillas distintas: 4,9,11* - Aplicaciones inyectivas: variaciones 4,9 - Aplicaciones biyectivas: permutaciones 9 - Aplicaciones cualesquiera: variaciones con repetición 4,9 *Colocación de objetos indistinguibles en casillas distintas:* *Aplicaciones imyectivas:* - combinaciones 5,9 *Aplicaciones cualesquiera:* - combinaciones con repetición 5,9 *Otras posibilidades en el modelo de colocación 10* **3. Modelo de partición:** - traducción al modelo de colocación 4,9,10 - caso de la bipartición 4,9,10	**Procedimientos gráficos:** - Diagramas en árbol 2,3,12 - Grafos 2,3,4 **Procedimientos numéricos:** *Reglas básicas de cálculo combinatorio:* - Regla del producto 1 y sig. - Regla de la suma 1 y sig. - Regla del cociente 5 y sig. - Números combinatorios 8,10,11,12 - Números factoriales 7,10,12 - Números de Stirling, ... 10 **Procedimientos lógicos:** - Recurrencia 6,8,10 - Principio de inclusión-exclusión 11 **Procedimientos tabulares:** - Matrices 8,10 **Procedimientos analíticos:** - Enumeración sistemática 1,2,3,5,6,7,9,11,12 - Funciones generatrices 12

6

ENFOQUE EXPLORATORIO EN EL ANÁLISIS MULTIVARIANTE DE LOS DATOS EDUCATIVOS[1]

Juan D. GODINO y Carmen BATANERO

Resumen

La investigación en el campo de la Educación tiene que afrontar con frecuencia la recogida de datos acerca de múltiples variables que intervienen en los procesos de enseñanza-aprendizaje. El estudio de dichos datos por medio de técnicas de análisis multivariante, tanto en el enfoque exploratorio como confirmatorio, se revela como imprescindible para comprender adecuadamente el funcionamiento de dichos procesos. El objetivo de este trabajo consiste en presentar una descripción resumida de las principales técnicas de análisis multivariante que motive a las personas interesadas por la investigación educativa a un estudio posterior más profundo en la bibliografía que se cita.

1. INTRODUCCIÓN

La principal dificultad que encuentra cualquier investigador en el campo de la Educación es la gran complejidad que presenta la realidad educativa. Generalmente, los fenómenos objeto de estudio no se pueden limitar a un sólo aspecto, valor o variable. Además, cada uno de ellos está enlazado con los demás de una forma e intensidad muy diversa, lo que hace difícil ordenar su estudio mediante una jerarquía de causa y efecto. Es necesario utilizar técnicas que nos permitan resumir la información que poseemos.

Debido a las muchas aplicaciones en ciencias experimentales y a las posibilidades informáticas actuales, las técnicas de análisis de datos han tenido un desarrollo espectacular en los últimos años, siendo cada vez más

[1] *Epsilon*, nº 29: 11-22, 1994

utilizadas en el campo de la Educación. Las capacidades de cálculo y representación gráfica de los ordenadores actuales permiten, de una forma sencilla, la obtención de una amplia variedad de gráficos y la aplicación de un gran número de técnicas diferentes y han hecho posible la aparición de una nueva filosofía en los estudios estadísticos: el análisis exploratorio de datos, introducido por Tukey (1977).

Anteriormente a este enfoque, el propósito del análisis era principalmente confirmatorio suponiéndose que el conjunto de valores de las variables observadas se debía ajustar a un modelo preestablecido -frecuentemente la distribución normal-, calculándose los estadísticos para aceptar o no una hipótesis previa a la toma de observaciones, las cuales se recogían con el único propósito de poner tal hipótesis a prueba. Este enfoque ha sido empleado principalmente en el denominado paradigma proceso-producto de investigación y ha conducido con frecuencia a resultados decepcionantes en la investigación. Esto es debido a la dificultad de conseguir el cumplimiento de los múltiples requisitos de aplicación de las técnicas estadísticas (véase, por ejemplo White, 1980) y llegar a la vez a la obtención de resultados estadísticamente significativos.

La filosofía del análisis exploratorio consiste en el estudio de los datos desde todas sus perspectivas y con todas las herramientas disponibles. El propósito es extraer cuanta información sea posible, con el fin de establecer conjeturas sobre las observaciones de las que disponemos.

Como contrapartida, tales «hipótesis» no quedan contrastadas en el sentido estadístico del término al finalizar el análisis, por lo que sería preciso la toma de nuevos datos (una replicación) sobre el fenómeno y efectuar sobre ellos un análisis estadístico tradicional con el fin de contrastarlas. Por ello, el análisis exploratorio se utiliza especialmente en las fases iniciales de la investigación experimental, en que se dispone de poca información sobre los objetos bajo estudio, siendo especialmente útil en el denominado paradigma «interpretativo» o «ecológico» de investigación.

Entre las técnicas estadísticas que pueden emplearse con un enfoque exploratorio, sin duda las de mayor utilidad son las que pueden englobarse dentro del análisis multivariante, caracterizado por el estudio conjunto de un grupo de p variables, medida cada una de ellas sobre n individuos. Este tipo de análisis maneja, por tanto, información multidimensional, y utiliza, además de métodos estadísticos, álgebra lineal, geometría y cálculo numérico, haciendo un uso intensivo de medios informáticos. Ambos enfoques —exploratorio y confirmatorio— pueden utilizarse en el análisis multivariante, aunque el segundo es más exigente respecto a las condiciones de aplicación.

2. TIPOS DE DATOS MULTIVARIANTES Y SU REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

Foucart (1982) distingue diferentes tipos de datos multivariantes, según que los caracteres observados sean cualitativos, cuantitativos, mixtos o se disponga de una matriz de correlaciones o cualquier otra medida de asociación entre las variables. Para generalizar, podemos considerar nuestros datos como una matriz:

$$\begin{matrix} x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots x_{1p} \\ x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots x_{2p} \\ x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots x_{np} \end{matrix}$$

En esta matriz, cada fila consta de la observación de p variables diferentes sobre un individuo y cada columna el conjunto de n valores diferentes de una misma variable aleatoria sobre n individuos distintos. Las variables pueden representar calificaciones en diferentes asignaturas, respuestas a un test de opciones múltiples, o cualquier otro tipo de rasgo medible u observable. Asimismo, el «individuo» puede ser un individuo real —profesor o alumno-, pero también puede tratarse de un período en una sesión de observación, un problema analizado dentro de los que componen un texto, una tarea realizada por un alumno, etc. En cualquiera de estos casos podemos representar geométricamente nuestros datos en un doble espacio vectorial: el espacio de los individuos y el de las variables.

2.1 El espacio de los individuos

El primero de estos espacios es el de los individuos, en el cual cada fila de la matriz (individuo) es un vector (o punto), cuyas coordenadas son los valores correspondientes de las p variables. De esta forma obtenemos n puntos en un espacio vectorial de dimensión p. En este espacio podemos definir la distancia entre dos individuos I_i, I_j, mediante:

$$d_I(I_i, I_j) = [\Sigma(x_{ik} - x_{jk})^2]^{1/2} \quad (k=1 \dots p)$$

De esta forma, dos individuos estarán tanto más próximos cuanto más coincidan los valores de las diferentes variables. Si reemplazamos uno de estos puntos por el centro de gravedad de las observaciones (vector formado por todos los valores medios), obtenemos la distancia de un punto al centro de gravedad.

En la distancia definida anteriormente pueden existir variables que estén medidas en escalas muy diversas. Sin embargo, se puede lograr hacer jugar a todas las variables un papel idéntico en la definición de la distancia, normalizando las variables.

2.2 El espacio de las variables

El segundo de estos espacios es el de las variables, que se obtiene tomando como vectores las columnas de la matriz. Este espacio es de dimensión n y consta de p puntos. En él podemos definir la distancia entre las variables V_i, V_j por:

$$d_V(V_i,V_j) = [\Sigma (x_{ik} — x_{jk})^2]^{1/2} = 2(l—r_{ij})$$

siendo r_{ij} el coeficiente de correlación muestral de la variables V_i, V_j. Por tanto, dos variables estarán a distancia máxima si $r_{ij} = -1$, a distancia cero si $r_{ij}= 1$ y a distancia media si están incorreladas.

Puesto que en el espacio R^n el coseno del ángulo que forman dos vectores o variables es el coeficiente de correlación entre ellos, dos variables incorreladas son ortogonales. Si las variables están tipificadas, el origen de coordenadas de este espacio es el vector cuyas coordenadas son los valores medios de las distintas variables. Un vector viene determinado por su dirección y norma (módulo o longitud), que en este caso coincide con la varianza de la variable.

Además de la distancia anterior (distancia euclídea) pueden utilizarse otras diferentes, como la distancia Chi-cuadrado, la métrica absoluta o la métrica de orden p. La elección de una u otra dependerá del tipo de datos y el propósito del análisis. Para mayor información sobre distancias estadísticas y medidas de similaridad puede verse, entre otros textos, Benzecri (1984) o Dunn y Everitt (1982).

2.3 Técnicas de análisis

En el análisis de un conjunto de variables podemos distinguir varios tipos de técnicas según su propósito:

- Métodos de clasificación de individuos y/o variables.
- Técnicas para reducción de la dimensión y/o representación gráfica de los datos.
- Métodos de predicción y/o estudios de causalidad.

Hay que tener en cuenta que esta clasificación no es exhaustiva, y que algunas técnicas pueden incluirse en más de un grupo. En este trabajo presentaremos un resumen de cada una de estas categorías y ejemplos de las técnicas específicas incluidas en ellas que se adapten especialmente al enfoque exploratorio, con objeto de dar una idea de las posibilidades actuales del análisis de datos en la investigación. Para una descripción más completa de los métodos de análisis multivariante, puede consultarse el libro de Cuadras (1981).

3. TÉCNICAS DE CLASIFICACIÓN

Con frecuencia la clasificación es el primer paso para la comprensión de un fenómeno complejo. En unos casos *(análisis de agrupamientos)* el interés está en determinar en el conjunto dado clases tan diferenciadas como sea posible. En otros *(análisis discriminante)* los grupos se diferencian de una forma natural e interesa determinar las características que provocan la separación existente entre los grupos.

3.1 Análisis de agrupamientos (o análisis «cluster»)

Puede ser realizado sobre las variables o sobre los individuos. El análisis de agrupamientos de variables está basado en una medida de asociación (o distancia), que puede ser el coeficiente de correlación, su valor absoluto u otra similar. Los conglomerados se forman mediante una regla de amalgamación que determina la similaridad de los grupos. Esta regla puede ser, entre otras:

- Distancia mínima entre todos los pares de variables en el grupo.
- Distancia media máxima entre diferentes grupos.
- Distancia máxima entre todos los pares de variables que componen el

grupo.

Inicialmente cada agrupación tiene una sola variable. En cada paso se unen las dos más similares. Como resultado final se produce un diagrama en forma de árbol o *dendograma,* que ilustra la secuencia de formación de los conglomerados y las distancias a las que se producen las uniones.

Si con este procedimiento es posible determinar la existencia de agrupaciones claramente diferenciadas, podemos lograr un doble objeto: en primer lugar, las variables pertenecientes a un mismo grupo, podrían estar midiendo el mismo constructo, por lo que sería posible prescindir de alguna de ellas o sustituir todo el grupo por una función de las variables que lo integran. Por otro lado, el número de grupos claramente diferenciados determina el número de características esencialmente diferentes, por lo que este método puede ser un paso previo al análisis factorial.

3.2 Análisis discriminante

Cuando la población está dividida en subconjuntos disjuntos (partición equivalente a una variable cualitativa que define los grupos) y en cada individuo se ha medido un cierto número de caracteres cuantitativos o de tipo mixto, este análisis permite explicar, en el sentido de la regresión, la variable cualitativa por los caracteres cuantitativos. Por ejemplo, se pueden tener dos grupos de alumnos (alto/bajo rendimiento) y se desea explicar la pertenencia a los grupos, en función de las características medidas sobre los individuos.

Para ello se utilizan las funciones discriminantes, que son las combinaciones lineales de las variables originales que mejor «separan» los grupos. También es posible, sobre la base de estas funciones:

- Evaluar la forma de reconstituir los grupos a partir de las variables cuantitativas.
- Determinar las variables más explicativas de la partición.
- Poner en evidencia los casos «atípicos» o individuos cuyos valores numéricos no corresponden al grupo a que pertenecen.

4. TÉCNICAS DE REDUCCIÓN DE LA DIMENSIÓN Y REPRESENTACIÓN DE DATOS

Estas técnicas tratan de visualizar y simplificar la estructura de los datos. En unos casos, se pretende proyectar los puntos dados en un espacio de dimensión inferior, conservando ciertas propiedades del conjunto inicial de datos, especialmente las referidas a las distancias entre individuos.

En otros casos, se trata de hacer un cambio de base. Las observaciones originales de los individuos están expresadas en la base formada por las variables, que pueden o no estar correlacionadas, es decir, en general no es una base ortogonal. Al transformar el conjunto inicial de variables en otro incorrelado, hacemos un cambio de base a una nueva ortogonal.

Entre los métodos que podemos incluir en este apartado se hallan el *análisis factorial, análisis de componentes principales, y análisis factorial de correspondencias.* Al igual que mediante una fotografía podemos reconocer los objetos tridimensionales fotografiados, con estos métodos podemos reconocer ciertas propiedades de los conjuntos de datos originales. Sin embargo, existen muchos enfoques y perspectivas diferentes para fotografiar un objeto, aunque no todos ellos son igualmente adecuados. Una de las tareas del enfoque exploratorio será precisamente la búsqueda de los parámetros y opciones que podemos elegir en los distintos procedimientos estadísticos, para lograr una óptima interpretación de nuestras observaciones, a la luz de la teoría que ha guiado la selección de las mismas.

4.1 Análisis de componentes principales

Se dispone de observaciones de p variables aleatorias V_1, V_2, **...** V_p, con distribución multivariante no necesariamente normal. Se desea examinar su intercorrelación o estructura de dependencia y hallar unas pocas combinaciones lineales Y_1, Y_2,...Y_q ($q<p$) de las variables iniciales que generen aproximadamente la misma estructura.

Estas nuevas variables reciben el nombre de componentes principales y son incorreladas dos a dos. Por ello, incluso aunque p y q coincidan, se ha simplificado la estructura, al pasar de un conjunto de variables correlacionadas (base oblicua) a otro incorrelacionado (base ortogonal) y se verifica, además, las relaciones siguientes:

$$Var(Y_1) \gg Var(y_2) \gg ... \gg Var(Y_q)$$

$$\Sigma Var(Y_i) = \Sigma\ Var(V_i)\ (i= 1 ...q;\ j= 1...p)$$

Estas relaciones expresan que la variabilidad total del conjunto inicial de variables es el mismo que el de componentes principales y estos se deducen, además, en orden decreciente de variabilidad explicada.

Por este motivo, si unos pocos componentes principales explican una gran parte (digamos el 95 por ciento) de la varianza, al proyectar los datos sobre el subespacio lineal formado por ellos, obtendremos una representación de los datos muy aproximada a la inicial.

4.2 Análisis factorial

Dadas n variables V_1, y_2, **...** V_p y la matriz de correlaciones entre ellas (r_{ij}), la técnica del *análisis factorial* trata de explicar las variables mediante un número reducido de variables latentes o hipotéticas F_1, F_2, F_m ($m<p$) llamadas *factores,* y una parte específica de cada variable U_1, U_2, **...** U_p. Se establecen las siguientes hipótesis:

- Los factores comunes y específicos (F y U) son variables tipificadas y están incorrelados.
- Una pequeña parte de la variabilidad de cada variable se explica por sí misma.

El modelo factorial viene dado por el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{l} V_1= a_{11}F_1+a_{12}F_2+ ...+ a_{1m}F_m+d_1U_1 \\ V_2 = a_{21}F_1+a_{22}F_2+ ... +a_{2m}F_m+ \qquad +d_2U_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_p= a_{pi}F_i+a_{p2}F_2+...+ a_{pm}F_m+ \qquad +d_pU_p \end{array}$$

Los coeficientes a_{ij} son llamados saturaciones, coinciden con el coeficiente de correlación entre la variable V_i y el factor F_j. y representan la contribución de la variable a dicho factor. La matriz $A=(a_{ij})$ se conoce como matriz factorial, y se verifica la siguiente relación entre los coeficientes del sistema y las varianzas de las variables V_i:

$$Var(V_i)=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\ldots+a_{im}^2+d_i^2$$

La suma $h_i^2 = a_{i1}^2+a_{i2}^2+ \ldots +a_{ip}^2$, recibe el nombre de «comunalidad» de la variable i y representa la parte de la varianza de V_i explicada por los factores comunes.

La cantidad d_i^2 recibe el nombre de «especificidad» de la variable V_i, y es la parte de su varianza explicada por si misma. Si las variables están tipificadas, al ser la suma $h^2+d^2=l$, estas partes se entienden como proporciones sobre la varianza total.

Una vez obtenida una solución factorial directa, se obtiene una nueva solución mediante una rotación de los factores, pues toda matriz rotada a partir de la solución factorial, es también una nueva solución. El objeto que se pretende al rotar la matriz factorial es obtener unas soluciones factoriales que sean fácilmente interpretables.

Como vemos, existen infinitas soluciones posibles para A. En particular, si se toma como primer factor F_i el que hace máxima la variabilidad de las variables explicadas por él, el segundo factor está incorrelado con el primero, y tiene máxima varianza y así sucesivamente, y las especificidades di se reducen a cero, coincide con el análisis de componentes principales.

Al emplear el análisis factorial con enfoque exploratorio se empieza sin hipótesis preconcebidas. Se trata de hallar una solución factorial con objeto de explorar la dimensionalidad latente de un conjunto de variables explicada a través de sus factores comunes, en la forma más simple posible.

4.3 Análisis factorial de correspondencias

El análisis factorial de correspondencias utiliza como datos tablas de contingencia, disyuntivas completas o de datos ordinales. Para el caso de tablas de contingencia, se desea estudiar la estructura de la asociación entre dos variables cualitativas. El método se basa en una descomposición de la χ^2 y el estudio se realiza mediante una representación gráfica conjunta de variables y casos, que tienen aquí un papel intercambiable.

Esta técnica permite apreciar qué valores de una de las variables están asociados con cada valor particular de la otra variable y qué individuos tienen un comportamiento similar respecto a las variables dadas.

El método permite introducir «individuos o variables suplementarias» que se representan gráficamente, pero no intervienen en el análisis. Son unos nuevos registros de datos «teóricos» que corresponden a los valores que se esperarían en unos individuos que presentasen las asociaciones previstas por ciertos modelos entre los valores de las diferentes variables. Esto permite ver en el gráfico resultante la diferencia entre estas hipótesis previstas y los resultados experimentales y, en consecuencia, confirmar o negar la teoría supuesta.

5. ESTUDIOS DE DEPENDENCIA Y ASOCIACIÓN

Los estudios sobre dependencia y asociación constituyen el grupo más numeroso de técnicas, en el cual también podemos incluir algunos de los métodos que hemos clasificado en otras categorías. En realidad, siempre que estamos trabajando con más de una variable, además de otros aspectos, estaremos interesados en la búsqueda de posibles relaciones entre las mismas.

Un primer problema en el estudio de la asociación es la definición de coeficientes para la medida de la intensidad de la misma. Tanto las distancias estadísticas elegidas para medir la proximidad de los individuos o las variables como las medidas de asociación empleadas, condicionan fuertemente la interpretación de los resultados del análisis.

Dentro de este grupo de métodos se incluyen los *modelos lineales (regresión, análisis de varianza y covarianza).* Cada uno de ellos puede ser a su vez simple, múltiple o multivariante, según haya una variable dependiente y una o varias independientes o varias variables dependientes. De estas técnicas, se han derivado, además, otras muchas como la *regresión no lineal* y los modelos *logarítmicos-lineales* que pasamos a describir.

5.1 Modelos logarítmico-lineales

Es una tabla de contingencia múltiple, formada al clasificar los datos por dos o más variables, (generalmente cualitativas), la técnica que estamos considerando permite ajustar los logaritmos de las frecuencias observadas según un modelo lineal. De este modo, podemos describir este método como una generalización del análisis de la varianza de efectos fijos, siendo la variable dependiente el logaritmo de la frecuencia observada en cada casilla de la tabla, y los factores las variables que han determinado la clasificación.

El propósito es analizar la tabla, obteniendo una descripción de la relación entre los factores, bien hallando un modelo al que se ajusten los datos (enfoque exploratorio) o bien probando y ordenando la importancia de los factores y de la interacción entre ellos (enfoque confirmatorio).

Supongamos, por ejemplo una tabla de 4 vías, siendo su dimensión IxJxKxL, respecto a cuatro variables A, B, C, y D. Sea f_{ijkl} la frecuencia observada en la celda (ijkl) de la misma. Para esta tabla, un ejemplo de un posible modelo log-lineal sería:

$$\ln f_{ijkl} = \mu + \lambda_i^{A} + \lambda_j^{B} + \lambda_k^{C} + \lambda_l^{D} + \lambda_{ij}^{AB} + \lambda_{ik}^{AC} + ... + \lambda_{ijkl}^{ABCD}$$

En este modelo, λ_i^A representa el efecto del nivel i del factor A sobre la frecuencia f_{ijkl} y análoga interpretación tienen los demás coeficientes.

Otros modelos posibles se obtienen suprimiendo algunos de los coeficientes del modelo anterior, como en el ejemplo siguiente, en el que el término ε_{ijkl} representa el error aleatorio, o parte de la frecuencia no explicada por los factores:

$$\ln f_{ijkl} = \mu + \lambda_i^{A} + \lambda_j^{B} + \lambda_k^{C} + \lambda_l^{D} + \varepsilon_{ijkl}$$

Para cualquier modelo que se especifique, el algoritmo correspondiente ajusta los valores λ, y realiza una serie de contrastes χ^2 de bondad de ajuste, que nos permiten apreciar si es conveniente para nuestros datos.

El propósito principal del *análisis log-lineal* es entender la relación entre los factores, pudiéndose distinguir en el mismo tres fases:

- Búsqueda de un modelo o modelos apropiados.
- Contraste, comparación y comprensión de los modelos seleccionados.
- Examen de las celdas con grandes diferencias entre los valores observados y los esperados.

5.2 Modelización causal (path analysis)

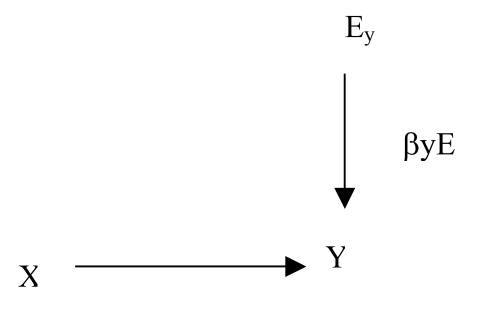
En los métodos anteriormente expuestos, se supone que existen dos conjuntos disjuntos de variables: dependientes e independientes. En la vida real, esto no es tan fácil de determinar, ya que las variables que dependen de otras dadas, son a su vez causa de otras nuevas. Las relaciones de dependencia entre un conjunto dado de variables serían modelizadas por una «red de implicaciones mutuas». La modelización causal es una herramienta de ayuda a la determinación de tal posible red de relaciones, aunque no hay que olvidar el papel determinante de la teoría, si la cual ningún método de análisis puede ser efectivo.

Esta técnica permite la descomposición e interpretación de las relaciones lineales entre las variables, cuando se dan las siguientes hipótesis:

1) Se conoce la estructura de una ordenación causal (débil) entre las variables.
2) Las relaciones entre estas variables son causalmente cerradas.

Dado un par de variables X_i y X_j, se dice que $X_i \geq X_j$ si X_i puede (o no puede) causar X_j, pero X_j no puede causar X_i. Esta relación de orden se denomina orden causal débil y hay que hacer notar que no requiere que X_i sea la causa de X_j. Sin embargo, aunque el orden causal no es siempre inequívoco, esta hipótesis es mantenible en muchas situaciones de investigación, por ejemplo, cuando se estudia la relación entre características inmutables de los individuos (sexo, raza, nacionalidad) y variables actitudinales (intenciones, preferencias...). Diremos, además, que la covariación entre X e Y está cerrada, si no existe influencia de otras variables.

La relación de orden se puede representar mediante un diagrama de flechas. Una relación bivariante se representa usualmente en la forma siguiente:

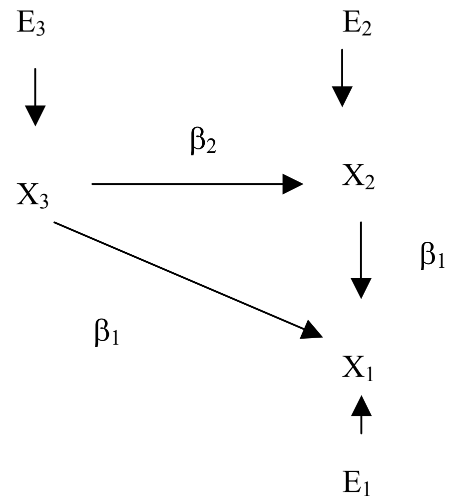


siendo $\beta_{yx}= r_{yx}$ el coeficiente de regresión de Y sobre X que, al ser las variables tipificadas coincide con el de correlación.

En este ejemplo, el sentido de las flechas indica la dirección del orden causal. La hipótesis de clausura se indica explícitamente por la ausencia de una línea que conecte X y la variable latente E_y que representa el conjunto de causas residuales de Y. Esta hipótesis se conoce también como «independencia de los errores».

Al establecer explícitamente las anteriores hipótesis, formulamos un *modelo implicativo.* En el caso considerarlo de sólo dos variables, este modelo genera poca información adicional. Esta situación cambia cuando aumenta el número de variables.

Supongamos, por ejemplo, la existencia de tres variables con las relaciones $X_3 \geq X_2 \geq X_1$. Un modelo implicativo, en forma de diagrama, sería:



Este mismo, modelo en forma de ecuaciones estructurales, se expresaría del siguiente modo:

$$X_3 = E_3$$
$$X_2 = \beta_{23} X_3 + E_2$$
$$X_1 = \beta_{13} X_3 + \beta_{12} X_2 + E_1$$

En las ecuaciones estructurales anteriores, las variables se suponen medidas como desviaciones a su media. Podemos estimar β_{23} por la regresión de X sobre $\mathbf{X_3}$ y β_{12} y β_{13} por la regresión de X_1 sobre X_2 y X_3.

En general, dadas n variables con la ordenación: $X_n \geq ... \geq X_1$, la estimación de los coeficientes β_{ij} requerirá (n-1) análisis de regresión realizados sobre las (n-l) variables de orden inferior como dependientes y todas las de orden superior como predictoras. Los coeficientes de las variables E_i son iguales a $1-R_i^2$, siendo R_i el coeficiente de correlación múltiple en la ecuación utilizada para estimar X_i. De este análisis se deduce:

- La proporción de variabilidad no explicada por la estructura, esto es, debida a las variables latentes.
- El efecto de cada variable sobre las demás.
- La descomposición de la covariación entre dos variables (el coeficiente de correlación) en las partes debida a causación directa, indirecta y correlación espúrea.

En los apartados anteriores hemos mostrado las posibilidades de algunas de las técnicas multivariantes que pueden ser aplicadas con enfoque exploratorio en el análisis de los datos. Con esta disponibilidad se ofrece al investigador un poderoso auxiliar con el que poder interpretar las observaciones de los complejos sistemas educativos.

Sin duda, cuando se haya logrado una adecuada difusión, el empleo de estas herramientas y de las nuevas que se irán desarrollando, será tan necesario en la investigación educativa como lo es en Biología o Medicina el uso del microscopio u otros objetos técnicos que permiten descubrir fenómenos inobservables sin ellos. No obstante, no hay que olvidar que ninguno de los métodos permite por si sólo la construcción de un modelo, que ha de estar sustentado por una fuerte base teórica.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

AFIFI, A.A. y AZEN, S.P. (1977): Statistical analysis: a computer oriented approach. New York: Academic Press.

ALDENFER, M.S. y BLASHFIELD, R.K. (1984): Cluster analysis. London: Sage University Press.

ASHER: Causal modeling. London: Sage University Press.

BENZECRI, J.P. (1984): L'analyse des donnees. París: Dunod.

BOLLEN, K.A. (1989): Structural equations with latent variables. New York: John Willey.

CORNEJO, J.M. (1988): Técnicas de investigación social: El análisis de correspondencias (Teoría y práctica). Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

CUADRAS, C.M. (1981): Métodos de análisis multivariante. Barcelona: Eunibar.

DUNN, G. y EVERITT, B.S. (1982): An introduction to mathematical taxonomy. London: Cambridge University Press.

ESCOFIER, B. y PAGES, J. (1988): Analyses factorielles simples et multiples. Objectifs, méthodes et interprétation. París: Dunod.

FLURY, B. y RIEDWYL, H. (1988): Multivariate statistics. A practical approach. London: Chapman and Hall.

FOUCART, T. (1982): Analyse factorielle: programation sur micro-ordinateur. París: Masson.

HARTWING, F. y DEARING, B.E. (1979): Discriminant analysis. London: Sage University Press.

KNOKE, D. y BURKE, P.J. (1980): Log-linear models. London: Sage University Press.

LEBART, L.; MORINEAU, A. y TABARD, N. (1977): Techniques de la description satistique. París: Dunod.

TUKEY, J.W. (1977): Exploratory data analysis. Reading, Mass.: Addison Wesley.

WHITE, A.L. (1980):Avoiding errors in educational research. En R.S. Shumway (Ed.): Research in Matematics Education. Reston, VA: N.C.T.M

7

ALGUNOS PROBLEMAS ÉTICOS EN LA ELABORACIÓN DE TESIS DOCTORALES[1]

Juan D. GODINO y Carmen BATANERO

Los documentos publicados por la AERA (Ethical Standards) y la AMS (Ethical Guidelines) constituyen un punto de referencia obligado para la reflexión y el debate, dado que, como cualquier otro campo de investigación, la Educación Matemática no puede ignorar los problemas éticos involucrados en el desarrollo de la misma. Por ello pensamos que la iniciativa de Quadrante de publicar estos dos documentos, y de estimular su discusión, es una excelente oportunidad para reflexionar sobre estas cuestiones en el seno de nuestra comunidad de investigadores.

Quisiéramos centrar nuestra aportación a este debate en el planteamiento de algunos problemas éticos asociados a la elaboración, evaluación y publicación de los resultados de una tesis doctoral. Nos apoyamos en el "III Guiding Standards: Intellectual Ownership" del documento de la AERA, así como otros similares contenidos en estándares sobre publicaciones científicas como, por ejemplo, las normas de la American Psychological Association (APA). Nuestra experiencia, primero al realizar nuestra propia tesis y luego como investigadores en Educación Matemática, como consultores estadísticos, y como directores de tesis doctorales nos han permitido apreciar algunos de estos problemas que describiremos a continuación.

1. RELACIONES ENTRE DOCTORANDOS Y SUPERVISORES

La participación de los directores de tesis doctorales en el desarrollo de la investigación puede ser muy variable, según los hábitos de cada país, la iniciativa de los estudiantes y de los propios directores o supervisores. En

1 *Quadrante,* Vol. 4 Nº 2, pp.39-42, 1995

algunos casos, el doctorando se incorpora a un proyecto en el que el director es el investigador principal. Las aportaciones de éste en el tema de tesis doctoral asignado al estudiante pueden ser esenciales: planteamiento del problema, sugerencias de ideas y métodos, obtención de conclusiones, revisión de partes extensas de la tesis. Es difícil limitar el grado de aportación del supervisor de la tesis, por cuanto se trata de un problema en el que está personalmente interesado. Un problema ético en estos casos es valorar la participación de los supervisores y el grado de iniciativa del estudiante en la valoración final de su trabajo.

Otros posibles problemas pueden tener su raíz en el exceso de carga por parte de un supervisor. Puesto que el doctorando necesita la aprobación de su supervisor podrían, a veces, retrasarse innecesariamente la finalización de las tesis, por no disponer éste de suficiente tiempo de atención al doctorando en la fase final del trabajo. Recíprocamente, también hemos encontrado casos en que, después de un período intenso de trabajo conjunto, el doctorando ha buscado un nuevo supervisor al no estar de acuerdo con la calidad o cantidad de trabajo que le exigía el primero de ellos. Ello plantea el problema de hasta qué punto debe obligar el compromiso mutuo de supervisor y doctorando para realizar un trabajo conjunto y hasta qué punto este compromiso debe extenderse a los miembros de los jurados de tesis que aceptan valorar un trabajo realizado en dichas condiciones.

Finalmente citamos la necesidad de que se reconozca el trabajo realizado por el supervisor como parte de su labor docente, similarmente a como se contempla la labor de tutoría de los alumnos en el nivel de licenciatura.

2. JURADOS DE TESIS Y CALIDAD DE LA INVESTIGACIÓN

El proceso de revisión y valoración de las tesis doctorales, es, en general, complejo y presenta serias deficiencias. Los miembros de los Jurados de tesis son elegidos habitualmente por los propios autores o supervisores de la investigación, lo cual implica que se propongan personas "afines" y conocidas. Esto es, por un lado, inevitable, dado lo especializado que es un trabajo de tesis, pero puede plantear conflictos personales. En ocasiones la calidad del trabajo es deficiente y los jurados no han recibido el trabajo con suficiente tiempo para poder sugerir algunas mejoras. Otras veces, la situación profesional del doctorando puede verse afectada en caso de recibir un informe desfavorable. Los distintos "Standards" de la AERA, clasificados en el primer apartado, “Responsabilities to the Field”, son aplicables en este supuesto.

En ocasiones, a los jurados “oficiales” de tesis se suman otros “extraoficiales”, por cuanto en el seno de los Departamentos existen normativas que exigen la aprobación interna de las tesis previamente a su lectura. La responsabilidad de los que intervienen en la crítica y aprobación interna de estas tesis debe comenzar por una lectura profunda de la misma e incluso por el reconocimiento de la incapacidad de juzgar la posible aportación de trabajos en campos con los que uno no se encuentra familiarizado.

Una solución a estas cuestiones puede ser la exigencia de que la parte sustancial de la investigación haya sido aceptada para publicación en revistas con sistema de “referees” anónimos, como requisito necesario y suficiente para proceder a su defensa. Esto puede, no obstante, contrariar el requisito de que la tesis consista en un “trabajo original no publicado” y dilatar excesivamente la presentación de la tesis.

3. EQUIPOS DE INVESTIGADORES Y PROFESORES

En Educación Matemática, con frecuencia, se tiene necesidad de contar con la colaboración de profesores. Unas veces su aportación se limita a ceder su hora de clase para que sus alumnos completen un cuestionario y colaborar en motivarlos para que la recogida de datos se realice en las mejores condiciones posibles. Otras veces, estos profesores forman parte de un equipo de investigación mixto, y participan en las distintas fases del desarrollo de la investigación: planteamiento del problema, diseño de un experimento de enseñanza, implementación, interpretación y redacción de resultados. Puede constituir un problema delicado que sólo uno de los componentes del equipo obtenga el grado de Doctor, cuando la investigación se ha desarrollado en un equipo en el cual, además del director, participan profesores y otros especialistas.

4. CONSULTORÍA ESTADÍSTICA Y/O METODOLÓGICA

La investigación en Educación Matemática tiene, en la mayoría de los casos, un componente experimental. Esto implica la necesidad de realizar un diseño experimental adecuado (incluyendo la selección de las variables de estudio, la construcción de los cuestionarios, la elección de la muestra), así como el uso de técnicas especializadas de análisis de datos y la interpretación de sus resultados. Con frecuencia, los doctorandos — incluso los directores de tesis — necesitan ayuda para realizar estas facetas del trabajo de investigación. En estas circunstancias se acude a la consultoría de un especialista en métodos de investigación o un estadístico profesional quien debe realizar, por tanto, una parte significativa y esencial de la investigación. Su trabajo no concluye con la entrega de las salidas impresas de los programas de ordenador utilizados, sino que debe redactar un informe con la interpretación de los resultados, informe que, más o menos modificado se incluye como parte substancial de la tesis. Creemos que en estos casos el consultor estadístico debe figurar como codirector de la investigación o bien como coautor en los trabajos que se deriven de ella, a menos que renuncie a hacerlo porque reciba una compensación económica por su trabajo. Esta condición de coautor para la persona que decide o implementa el análisis estadístico se contempla, por ejemplo en las normas de la American Psychological Association.

5. PUBLICACIÓN DE LOS RESULTADOS DE LA TESIS

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, vemos que una tesis no es, con frecuencia, un trabajo personal de un doctorando, sino de un equipo en el que forman parte el supervisor, el analista de datos y los profesores colaboradores. Todas estas personas deben tener opción a figurar como coautores de las publicaciones que deriven de su contribución específica en el orden en que acuerden conjuntamente. Esto puede plantear un problema ético, en el caso de que una editorial o el mismo autor publique su Memoria de Tesis con el correspondiente copyright a su nombre. Otra cuestión relacionada con la anterior es que si la tesis ha sido publicada completa por una editorial, debería hacerse referencia a ello al enviar posteriormente a una revista una parte de la investigación como trabajo original, no publicado.

8

CONTENIDOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS PARA LA FORMACIÓN DE INVESTIGADORES EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA[1]

Juan D. GODINO y Carmen BATANERO

Resumen

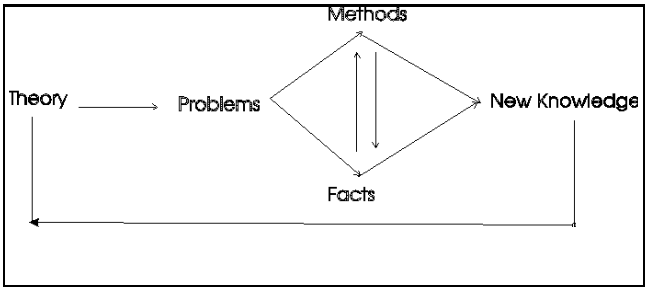
La investigación científica está comprometida con el uso y elaboración de modelos teóricos explicativos, o predictivos, de una cierta clase de fenómenos. Asimismo, el logro de un cierto grado de validez y generalizabilidad de las teorías elaboradas deben basarse en un trabajo sistemático y disciplinado y, por tanto, en la aplicación de métodos de investigación aceptados en el seno de una comunidad. Por este motivo, la formación de investigadores en Educación Matemática debe prestar una atención especial a estos componentes de la investigación: la teoría y el método. En este trabajo describiremos la orientación general, su justificación, objetivos y contenidos de cursos de tercer ciclo que se proponen la formación de los estudiantes de doctorado en teoría y métodos para investigar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La preparación de estos cursos y la reflexión sobre la práctica de impartición de los mismos nos han permitido, asimismo, elaborar una perspectiva integradora de diversos enfoques y paradigmas de investigación en Educación Matemática, la cual se presenta también en este trabajo.

1. PAPEL DE LA TEORÍA Y LOS MÉTODOS EN LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

Una cuestión esencial para la investigación en Educación Matemática fue planteada en el ICMI Study celebrado en Washington en 1994: ¿Qué es un problema de investigación en Educación Matemática y cuáles son sus

1 [Theoretical and methodological contents for the preparation of researchers in Mathematics Education]. En, O. Björkqvist et al. (Eds*.), Proceedings of Nordic Simposium, Preparation of Researchers in Mathematics Education* (pp, 57-71). University of Umea (Suecia), 1995.

resultados? En relación a esta cuestión, pensamos que no se puede dar una respuesta a esta pregunta independientemente del análisis previo de los marcos teóricos y metodológicos existentes en el área de conocimiento. El planteamiento de problemas de investigación científica requiere tener en cuenta el sistema de ideas previas elaboradas por la comunidad interesada en la solución de los mismos, los cuales generalmente están articulados en principios, marcos conceptuales y teorías. A su vez, los resultados pretendidos adoptan la forma de nuevas afirmaciones, integradas en las teorías previas y validadas con unos procedimientos metodológicos aceptados. Por tanto, la teoría constituye un punto de partida y de llegada dentro del bucle investigativo, y el método es un elemento mediador fundamental entre los problemas, los hechos y los nuevos conocimientos, como se refleja en el diagrama adjunto.



La solución de los problemas de investigación, con criterios de calidad científica y relevancia adecuados (Nissen y BlomhØj, 1993), precisa realizar un trabajo sistemático y disciplinado que garantice la validez y fiabilidad de las afirmaciones pretendidas, esto es, debe estar guiada por una metodología adecuada de investigación. Así pues, dos componentes básicos de un programa de tercer ciclo en Educación Matemática son aquellos cursos que presentan a los estudiantes los contenidos teóricos fundamentales del área de conocimiento y los que ofrecen estrategias metodológicas adaptadas a las peculiaridades de la investigación en el área.

Formación de investigadores en Educación Matemática

Las reflexiones que presentamos en este trabajo, sobre las ideas esbozadas anteriormente, están basadas en nuestra experiencia en la organización y puesta en marcha del programa de doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en el análisis de los programas de formación de investigadores en Educación Matemática en diferentes países (Batanero y cols , 1992) y en la impartición de cursos de doctorado sobre teoría y métodos de investigación en programas de doctorado de varias universidades españolas en el período 1988-95.

En particular nos basamos en nuestra experiencia docente e investigadora en el programa de la Universidad de Granada. Dicho programa se oferta dentro de un Departamento específico de Educación Matemática y los estudiantes a los que va dirigido tienen, en su mayoría, una licenciatura en Matemática, lo que supone para los mismos cinco años de estudios matemáticos en el nivel universitario. Asimismo, en las primeras promociones, se han inscrito profesores con una gran experiencia docente, en los niveles de enseñanza secundaria o universitaria. Este programa de doctorado comprende un total de 320 horas de cursos y seminarios, abarcando los siguientes componentes:

- contenidos metodológicos;
- contenidos fundamentales del área de conocimiento;
- líneas específicas de investigación;
- trabajo de investigación:
- seminario de investigación;
- materias afines complementarias;

Además de estas enseñanzas regladas el doctorando debe realizar, para lograr el grado de doctor, la tesis doctoral, que será la Memoria de un trabajo original de investigación dirigido por un doctor especialista en el área correspondiente. Hasta la fecha se han completado 8 tesis doctorales dentro del programa.

En este trabajo vamos a presentar la orientación general, su justificación, los contenidos y bibliografía básica de tres cursos correspondientes a los componentes teórico (o fundamental) y metodológico que han estado bajo nuestra responsabilidad.

2. TEORÍA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

El fin específico de la Educación Matemática, como campo de investigación, es el estudio de los factores que afectan a la instrucción sobre las matemáticas (enseñanza y aprendizaje de la misma en instituciones educativas) y el desarrollo de programas para la mejora de dicha instrucción. Como consecuencia, una cuestión prioritaria deberá ser la indagación sobre la naturaleza del propio conocimiento matemático, así como de su génesis personal e institucional. Este debe ser un paso previo para estudiar las cuestiones instruccionales y curriculares. Además de ésta componente epistemológica consideramos necesario ofrecer a los estudiantes de postgrado una perspectiva general del área de conocimiento, así como de las diversas concepciones o marcos teóricos que se van configurando en la misma. Como consecuencia, el curso de Teoría de la Educación Matemática se desarrolla en cuatro bloques de contenido principales:

1) La Didáctica de la Matemática como disciplina científica
2) Fundamentos epistemológicos de las matemáticas
3) Instrucción matemática
4) Currículo matemático

A continuación, describimos la orientación de cada bloque, su justificación, las principales fuentes de conocimiento y la articulación entre los mismos.

2.1. La Didáctica de la Matemática como disciplina científica

En el curso de *Teoría de la Educación Matemática* nos parece importante presentar la Educación Matemática a los estudiantes como un sistema social complejo y heterogéneo en el que es necesario distinguir tres ámbitos o campos de estudio:

a) La acción práctica reflexiva sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
b) La investigación científica, que trata de comprender el funcionamiento del sistema de enseñanza de las matemáticas en su conjunto y de los sistemas didácticos particulares (profesor, alumnos y saber a enseñar), y, en cierta medida, predecir su comportamiento.
c) La tecnología didáctica, que se propone poner a punto materiales y recursos, usando los conocimientos científicos disponibles, para mejorar la eficacia de la instrucción matemática

Estos tres campos se interesan por un mismo objeto -el funcionamiento de los sistemas didácticos- e incluso tienen una finalidad última común: la mejora de la Educación Matemática. Pero la perspectiva temporal, los objetivos, los recursos disponibles, sus reglas de funcionamiento y las restricciones a que están sometidos, son intrínsecamente distintos. El mundo de la acción práctica es el "territorio" propio del profesor, el cual tiene a su cargo uno o varios grupos de estudiantes a los cuales trata de enseñar matemáticas.

El campo de la investigación científica (básica y descriptiva) se compromete de modo particular en la elaboración de teorías y suele estar a cargo de profesores universitarios, los cuales, aunque también pueden tener asignada la enseñanza de una materia (matemáticas, didáctica, ...), dedican un porcentaje importante de su tiempo a "investigar" sobre cuestiones relacionadas con la Educación Matemática, en alguno de sus niveles y aspectos. Se puede hablar, por tanto, del "oficio" o profesión de investigador para el desempeño de esta función.

Finalmente, el tercer componente, que hemos denominado tecnológico (o investigación aplicada) es prescriptivo, ya que está más comprometido con la elaboración de dispositivos para la acción, y es el campo de actividad propio de los diseñadores de currículos, los escritores de manuales escolares, materiales didácticos, etc.

En nuestra opinión estos tres componentes no deben funcionar independientemente unos de otros, ni existe una distinción jerárquica entre los mismos, pues a veces sus fronteras son difusas. Por el contrario, debe haber cooperación y diálogo entre los tres ámbitos.

Consideramos que es necesario distinguir los rasgos característicos y las funciones de cada ámbito, para analizar el sistema del que forman parte. Su distinción permite concienciar a los estudiantes sobre el carácter teórico de la investigación que deben realizar para la obtención del grado de doctor, aunque pueda tener también consecuencias prácticas y producir medios tecnológicos para la acción en el aula. Además, si no se reconocen las diferencias existentes entre estos componentes, no se comprenderá el funcionamiento de todo el sistema de la Educación Matemática. El mundo de la práctica necesita soluciones inmediatas que, en el momento actual, difícilmente puede ofrecer la investigación científica. La complejidad de los problemas educativos podría equipararse, en general, a la de otros campos de la actividad humana con mayor tradición, para los cuales no existen aún soluciones a todos los problemas (por ejemplo, la economía o la medicina,...) En consecuencia, la tecnología didáctica tiene que operar en muchas ocasiones basándose en el buen parecer, la experiencia, el sentido común de sus actores.

La realización de estas reflexiones con los estudiantes de tercer ciclo nos parece necesario, ya que la mayoría de ellos son profesores de enseñanza secundaria con unas concepciones arraigadas muy apegadas a los problemas de la práctica, para los cuales no se disponen de herramientas conceptuales y metodológicas para abordarlos en toda su complejidad.

Por tanto, un aspecto esencial de cualquier programa de formación para la investigación en Educación Matemática debe ser tener en cuenta las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, así como sobre la naturaleza de la investigación sobre estas cuestiones.

2.2.Fundamentación epistemológica

La preparación de investigadores en Educación Matemática debe enfatizar la reflexión epistemológica sobre las matemáticas y sobre la naturaleza y componentes de la Educación Matemática como área de conocimiento y campo de investigación. Ello permitirá plantear proyectos de investigación sobre cuestiones específicas y relevantes, relativos a los procesos de comunicación y construcción del conocimiento matemático por los alumnos en las instituciones educativas y sobre los factores condicionantes de los mismos.

Ahora bien, la complejidad de los problemas educativos, pone a la Didáctica de las Matemáticas ante el dilema de desarrollar un espacio de indagación propio de carácter básico o fundamental. No es posible explicar y predecir el funcionamiento de los sistemas didácticos si no se aclaran y explicitan los supuestos ontológicos y epistemológicos de las propias matemáticas y de los procesos psico-sociales que tienen lugar en la formación de los conocimientos matemáticos. La indagación didáctica realizada con criterios de rigor científico exige adoptar o elaborar teorías sobre las cuestiones mencionadas, en las cuales basar agendas de investigación coherentes y productivas.

Una de las cuestiones fundamentales dentro de esta problemática es si el estudio de los problemas didácticos precisa una conceptualización explícita sobre los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones y teorías), los procesos por los que se desarrollan y evolucionan dichos objetos matemáticos -tanto en el sujeto individual, como en su génesis histórica e institucional- y el significado de los mismos.

El carácter dispar, con frecuencia contrapuesto, de las múltiples respuestas dadas a las cuestiones ontológico-epistemológicas sobre las Matemáticas, nos ha llevado a iniciar una indagación sistemática personal sobre la noción de objeto matemático y su significado, a sabiendas, no obstante, de que estas cuestiones son un tema central de todas las disciplinas interesadas por la cognición humana. La teoría del objeto matemático y sus significados institucionales y personales (Godino y Batanero, 1994a y 1994b), que presentamos y discutimos con nuestros estudiantes de doctorado, es una primera consecuencia de nuestra investigación sobre estas cuestiones. Esta teoría está estrechamente inspirada en las ideas de 'objeto' y 'relación al objeto' de Chevallard (1992) y en los planteamientos pragmáticos del 'significado como uso' de Wittgenstein.

Las hipótesis epistemológicas y psicológicas que sirven de punto de partida para la teoría desarrollada son las siguientes:

a) Las matemáticas constituyen una actividad humana que se interesa por la solución de situaciones problemáticas, las cuales pueden referirse al mundo físico, social, o al propio dominio de las Matemática. Como respuesta o solución a estos problemas externos o internos, los objetos matemáticos emergen y evolucionan progresivamente. Por tanto, son los actos de las personas la fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas, de acuerdo con las teorías constructivistas Piagetianas.

b) Las Matemáticas constituyen un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones-problemas y las soluciones encontradas. Los sistemas de símbolos, dados por la cultura, tienen una función comunicativa y un papel instrumental, ya que cambian a las propias personas que usan los símbolos como mediadores. Este supuesto asume los planteamientos psicológicos de Vygostskii y los semióticos de Rotman.

c) Las Matemáticas constituyen un sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido. Los objetos matemáticos son entidades culturales cuya naturaleza sistémica y compleja no puede ser descrita meramente con definiciones formales cuando nos interesamos por los procesos de enseñanza y aprendizaje de los mismos.

A partir de la teoría elaborada, proponemos una agenda de investigación para la Didáctica de las Matemáticas centrada, como área prioritaria, en la caracterización de los significados personales e institucionales de los objetos matemáticos, su mutua interdependencia y desarrollo evolutivo. Esta teorización ofrece la posibilidad de presentar, bajo una perspectiva unificadora, la investigación en Didáctica de las Matemáticas, a partir de las nociones de *semiometría* (determinación de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos) y *ecología de significados* (estudio de las condiciones de desarrollo, adaptaciones y relaciones mutuas entre los significados institucionales y personales) .

2.3. Instrucción matemática: La teoría de situaciones de G. Brousseau

La Educación Matemática está comenzando a ser reconocida a nivel internacional como una disciplina científica específica (como se puede ver en Grouws, 1992; Biehler y cols, 1994), en la confluencia dialéctica de otras disciplinas básicas: Epistemología, Matemáticas, Psicología, Sociología, etc. Esta diversidad de teorías y planteamientos plantea una dificultad a la hora de seleccionar los contenidos teóricos de un plan de formación de investigadores en el área. Se impone la necesidad de hacer una selección de aquellos planteamientos que, desde una perspectiva integradora, tratan de articular teorías que tengan en cuenta la especificidad del conocimiento matemático y los procesos de construcción y comunicación de los mismos. Desde nuestro punto de vista, la producción teórica de la denominada escuela francesa de Didáctica de la Matemática, particularmente la elaborada por el profesor G. Brousseau, nos parece que contiene elementos importantes a estudiar y tener en cuenta. Por este motivo tiene un lugar destacado entre los contenidos del curso. Indicamos, a continuación, algunas ideas justificativas del papel que atribuimos a esta teorización dentro de la Didáctica de la Matemática.

Las tendencias recientes en la filosofía de las matemáticas (Tymoczko, 1986) y de la educación matemática (Ernest, 1991), junto con las teorías constructivistas del aprendizaje, apoyan un nuevo enfoque para la enseñanza de las matemáticas en el que se enfatizan las actividades de resolución de problemas, así como los procesos de formulación, comunicación y validación de los conocimientos matemáticos en el aula. El saber matemático ha dejado de ser considerado meramente como un conjunto de definiciones y teoremas cuya enseñanza se logra mediante una elegante presentación a los alumnos.

Como sostiene Brousseau (1986), el trabajo del profesor se equipara ahora al del investigador matemático, aunque la relación que debe mantener entre la teoría matemática y las aplicaciones se produce en sentido inverso a la de aquél. El investigador parte de problemas de la vida real o de la propia matemática; por medio de un proceso de descontextualización y despersonalización de las soluciones informales que encuentra a los mismos, elabora nuevos conceptos y procedimientos matemáticos, extendiendo y generalizando al máximo estas soluciones a los problemas particulares.

Al profesor, por el contrario, se le encomienda la tarea de ayudar a los alumnos en la apropiación de las herramientas conceptuales y procedimentales matemáticas ya creadas, que capaciten a éstos para resolver problemas en su futura vida profesional. Para esta función, el profesor tiene que buscar y seleccionar las situaciones problemáticas idóneas que den sentido a los conocimientos objetivos y permitan a los alumnos realizar, con interés propio, una actividad de investigación personal. Como consecuencia de este trabajo, el alumno logrará producir un conocimiento personal, contextualizado, esto es, ligado a las situaciones propuestas por el profesor.

Por otra parte, las matemáticas, además de ser una actividad humana, constituyen un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones problemáticas y las soluciones encontradas; por tanto, se deben organizar también situaciones didácticas en las que se ofrezca al alumno la oportunidad de practicar este discurso matemático. Finalmente, para que el alumno pueda compartir su conocimiento con los demás compañeros y se sienta integrado con la cultura matemática generada a lo largo del tiempo, el proceso de enseñanza - aprendizaje tiene que completarse mediante la organización de situaciones didácticas de institucionalización, en las que el profesor ayuda a fijar el significado colectivo de los objetos y el lenguaje matemático. En esta fase se tiene que producir, por tanto, un nuevo proceso de descontextualización y despersonalización de los conocimientos: los conocimientos personales de los alumnos se extienden, generalizan y comparten.

La concepción de las matemáticas, de su enseñanza y aprendizaje organizado, que hemos expuesto sucintamente, es la contenida en la Teoría de Situaciones Didácticas de G. Brousseau (1986). En esta concepción se enfatiza el carácter de las matemáticas como actividad o quehacer humano, en la línea sostenida por Lakatos, pero también tiene en cuenta su condición de lenguaje simbólico y de sistema conceptual socialmente compartido. Se pretende que la enseñanza de las matemáticas sea concordante con esta caracterización , lo cual exige la puesta a punto de un complejo trabajo de ingeniería didáctica (Artigue, 1989), esto es, la elaboración de secuencias instruccionales basadas en las teorías didácticas explicitadas.

Si la programación de las actividades del aula debe atender a la resolución de problemas como vehículo principal del aprendizaje matemático, a los momentos de formulación, comunicación y discusión de los conocimientos personales y contextualizados de los alumnos y a los procesos de institucionalización, la tarea del profesor de matemáticas se ha hecho más compleja, exigiéndosele un conocimiento más profundo, no sólo de los principios psicopedagógicos correspondientes, sino también del propio contenido de enseñanza. No es suficiente conocer el "texto del saber" matemático, sino que se requiere también el dominio del campo de problemas del cual emergen los conceptos. Es preciso que el profesor posea información sobre los procesos matemáticos y cognitivos implicados en la resolución de dichos problemas, sobre los pasos de dichos procesos en los que son previsibles dificultades y errores por parte de los alumnos, sobre las preconcepciones de sus alumnos y el desarrollo evolutivo previsible respecto a los conceptos que se les quiere enseñar.

Todas estas cuestiones plantean un vasto campo de investigación didáctica que puede ser presentado a los estudiantes de doctorado bajo la perspectiva unificadora de la Teoría de Situaciones.

2.4. Currículo matemático basado en la dialéctica entre campos de problemas y herramientas conceptuales

La perspectiva de las matemáticas y de su enseñanza esbozada en los apartados anteriores tiene que incidir sobre el diseño de planes de educación matemática, esto es, en el currículo matemático, entendido como un plan operativo que detalla qué matemáticas necesitan conocer los alumnos, qué deben hacer los profesores para conseguir que sus alumnos desarrollen sus conocimientos matemáticos y cuál debe ser el contexto en el que tenga lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En síntesis los supuestos pedagógicos que consideramos deben guiar la elaboración de propuestas curriculares para la educación matemática son los siguientes:

1) El fin primordial de la acción del profesor en el aula es ayudar a los alumnos a desarrollar el razonamiento matemático, la capacidad de resolución de problemas, de formulación y comunicación de ideas matemáticas y el establecimiento de relaciones entre las distintas partes de las matemáticas y restantes disciplinas. Asimismo, es prioritario favorecer una buena disposición hacia las matemáticas y su quehacer.
2) Se debe prestar una atención especial a la organización de la enseñanza y el aprendizaje: lo que los alumnos aprenden depende fundamentalmente de cómo se lleva a cabo este aprendizaje. Este supuesto implica, además de una cuidadosa selección de las tareas, el diseño de situaciones didácticas que proporcionen oportunidades a los alumnos de indagar personalmente problemas significativos para ellos y relevantes desde el punto de vista matemático, a formular hipótesis y conjeturas, utilizar diversos tipos de representaciones; a validar sus soluciones y comunicarlas a otros, dentro de un clima cooperativo y de

discusión científica.

3) Hay que llevar al alumno al reconocimiento progresivo del grado de desarrollo actual de las matemáticas, como conjunto de conocimientos y de su aplicabilidad en distintas ramas de la actividad humana. El fin perseguido es la apropiación progresiva del conocimiento matemático por los alumnos, esto es, la construcción de una red de conceptos y procedimientos, así como el dominio del lenguaje matemático, en consonancia con el conocimiento matemático objetivo. Con dicho fin se deben diseñar situaciones específicas de institucionalización de los conocimientos pretendidos.

Además, el currículo debe ser flexible y adaptado a las capacidades de los distintos alumnos. Para que el aprendizaje significativo de las matemáticas alcance a todos los alumnos se deben proponer situaciones problemáticas introductorias sobre las que toda la clase puede trabajar, pero, además, se deben proporcionar actividades de desarrollo para los alumnos más capacitados. Finalmente, indicamos que la observación continuada de los procesos de enseñanza- aprendizaje debe ser la principal estrategia evaluadora de los mismos, evitando, siempre que sea posible las evaluaciones sumativas, que casi siempre perturban el desarrollo de una verdadera educación matemática.

Estas ideas son desarrolladas y discutidas con los estudiantes de tercer ciclo usando como ejemplos nuestros trabajos Godino y cols (1987) y Batanero y cols (1994a; 1994b), las cuales contienen propuestas concretas para la enseñanza de la Probabilidad y de la Combinatoria, respectivamente, coherentes con los presupuestos epistemológicos e instruccionales descritos.

3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Clarificada la naturaleza del conocimiento matemático, y presentada una perspectiva integradora de las tendencias actuales en Didáctica de la Matemática, adquieren significado para los futuros investigadores cuestiones más específicas, como las siguientes:

- ¿Cuál es la estructura del conocimiento de los sujetos sobre los distintos campos conceptuales matemáticos?
- ¿Cuáles son las variables que caracterizan sus estados y posibilitan su control?

- ¿Cómo evoluciona esta estructura, bien espontáneamente o por la acción específica de determinadas intervenciones educativas?
- ¿Qué restricciones contextuales, de los sujetos, etc. dificultan o condicionan el cambio?

La obtención de posibles respuestas a estas cuestiones requiere el diseño y construcción de instrumentos de observación, encuesta y medida, el diseño de intervenciones educativas y el análisis de los datos correspondientes. Estos aspectos deben ser cubiertos mediante los contenidos de los cursos metodológicos. En estos cursos se tienen en cuenta principalmente las siguientes áreas de estudio: paradigmas y tipos de investigaciones, el proceso de investigación, métodos y técnicas de recogida de datos y análisis de datos.

3.1. Paradigmas y tipos de investigaciones

Un aspecto importante que es necesario presentar y discutir con los estudiantes es la noción de *paradigma* y el análisis crítico de los más significativos dentro del área de conocimiento. En este sentido cabe citar los dos polos extremos siguientes:

- el enfoque positivista o proceso-producto, que trata, especialmente, de encontrar leyes y de confirmar hipótesis acerca de las conductas y procedimientos que se asocian con ganancias en el rendimiento de los alumnos;
- el enfoque interpretativo, orientado a la búsqueda del significado personal de los sucesos, el estudio de las interacciones entre las personas y el entorno, así como los pensamientos, actitudes y percepción de los participantes.

El programa positivista o proceso-producto utiliza preferentemente los métodos cuantitativos, generalmente asociados con las mediciones sistemáticas, diseños experimentales, modelos matemáticos, mientras que el programa interpretativo (ecológico, etnográfico, ...) está asociado con las observaciones naturalistas, el estudio de casos, la etnografía y los informes de tipo narrativo (Denzin y Lincoln, 1994).

Estos programas tan dispares en sus planteamientos han coexistido y aún lo hacen en el campo de la enseñanza y aprendizaje en general, y por tanto, también en Educación Matemática. Muchas de las actuales investigaciones educativas pueden catalogarse en un punto intermedio entre ambos paradigmas.

Además de los anteriores, hemos de distinguir un tercer paradigma socio-critico, partidario de conectar la investigación con la práctica, con la vista puesta hacia su cambio en la dirección de una mayor libertad y autonomía de los participantes. No es suficiente penetrar en una clase y observar el encuentro educacional. Se precisa también guiar directamente la práctica; esto precisa una mayor colaboración entre el profesor y el investigador.

Un ejemplo de integración entre los diversos paradigmas expuestos viene dado en algunas de las investigaciones desarrolladas por la escuela francesa de Didáctica de la Matemática. El problema principal, para la concepción con orientación matemática o fundamental, es la investigación de las condiciones en las cuales se constituye el saber con el fin de su optimización, de su control y reproducción en situación escolar esencialmente. Como describe Artigue (1989), esto va a conducir a conceder una importancia particular al objeto de la interrelacción entre los dos subsistemas (saber - alumno) que es la situación- problema y la gestión de esta interacción por el profesor.

Los supuestos subyacentes a este enfoque metodológico son:

- la complejidad del fenómeno educativo, que hace necesario un estudio holístico y de casos, así como disponer de técnicas múltiples de recogida de datos;
- la especificidad respecto al saber matemático, que hace posible la generación de hipótesis previas, a partir del estudio de dicho saber y de su génesis epistemológica;

Estos supuestos le llevan a incorporar en su programa de investigación rasgos de los distintos paradigmas considerados:

- estudio de casos; enfoque holístico; técnicas múltiples de recogida de datos; interés en las variables de proceso y en las interrelaciones entre los componentes del sistema;
- existencia de tratamiento; se preparan con cuidado las lecciones, los profesores, las situaciones, la forma de trabajar, con la finalidad de provocar efectos específicos;
- se formulan hipótesis previas generadas a partir de una teoría general y del estudio "a priori" de la situación, la cual, a su vez, se construye basada en la teoría;
- se apoyan fuertemente en los métodos estadísticos, especialmente las técnicas del análisis multivariante de datos, aunque dichos datos sean esencialmente de tipo cualitativo.

3.2. El proceso de investigación

Una vez delimitada un área problemática, la investigación científica debe partir del conocimiento de la bibliografía relacionada con el tema de investigación elegido. Dentro del mismo, conviene especificar lo más claramente posible un problema concreto, elegido en base al éxito potencial de la investigación, respecto a otros posibles problemas dentro del área y teniendo en cuenta los recursos disponibles.

Centrado el problema, es posible abordarlo desde una multiplicidad de enfoques, de los que también habrá que seleccionar el más adecuado. A lo largo de la fase experimental se van perfilando los objetivos e hipótesis. Cada una de estas hipótesis lleva a la definición de variables a estudiar, de las cuales se precisa recoger información. Con frecuencia la diversidad y número de las variables de interés lleva a la necesidad de limitar el número de variables independientes y dependientes y a la necesidad de control o medición de las variables extrañas, de modo que no perturben las conclusiones que podamos obtener de los datos recogidos. Las técnicas de *diseño experimental* y *cuasiexperimental* (Cook y Campbell, 1979) pueden resultar útiles, tanto en la asignación de sujetos a experimentos de enseñanza, como en la selección de ítems para la construcción de cuestionarios, y, en general en el diseño de situaciones de enseñanza y evaluación.

Asimismo, con frecuencia será preciso limitarse a muestras de alumnos, materiales, profesores, centros o situaciones problemáticas. Las *técnicas de muestreo* nos pueden ayudar a obtener una muestra representativa, de modo que con un número limitado de elementos nuestras posibilidades de generalización sean lo más amplias posibles. Los estudiantes de doctorado deben conocer las limitaciones de la metodología elegida. Por lo mismo, se discutirá con ellos los conceptos de *validez* (Messick, 1991)*, fiabilidad, generalizabilidad,* (Feldt y Brennan, 1991), etc.

El esfuerzo dedicado a estos aspectos es de gran importancia, tanto para optimizar las posibilidades de extraer conclusiones a partir de los datos disponibles, como para la economía de la investigación. En consecuencia, consideramos que un programa de doctorado en Educación Matemática debe proporcionar a los doctorandos información sobre los principios por los que debe guiarse un proceso de investigación y los fundamentos del diseño de investigaciones, estudiando las posibilidades y limitaciones de los diseños más utilizados en el campo educativo.

3.3. Métodos y técnicas de recogida de datos

Los métodos y técnicas de recogida de datos requieren un tratamiento particular dentro del proceso de investigación, los cuales podrían ser impartidos en colaboración con otros departamentos, como los de *medición educativa* o *psicometría.*

Según los supuestos epistemológicos y cognitivos explicitados anteriormente, los conocimientos de un sujeto sobre un contenido matemático es un sistema complejo, no observable directamente, cuyo sistema de indicadores empíricos se caracteriza por los siguientes rasgos:

- multidimensionalidad: el conocimiento del sujeto se asemeja más a un árbol que a una escalera o rampa ascendente; se compone de distintos aspectos cuya apropiación precisa la realización de distintos 'actos y procesos de comprensión' (Sierpinska, 1994).
- carácter cualitativo, que se manifiesta en cada uno de sus componentes; así para un concepto o propiedad dada no pueden reducirse las posibles manifestaciones que los sujetos hacen de la misma a 'conocerla' o 'no conocerla'; interesa diferenciar los distintos tipos de errores y estrategias, que, en general, no pueden ser ordenados en una escala numérica.
- importancia de las interacciones: puesto que nos encontramos ante el estudio de un sistema, éste no queda determinado por la enumeración de sus componentes. La estructura del mismo, esto es, las interacciones entre los diferentes componentes del significado, es un aspecto esencial, porque nos revela posibles variables sobre las que actuar si queremos lograr una evolución de estos conocimientos.

Para tener en cuenta estas características, las tareas o situaciones de evaluación deben estar constituidas por cuestionarios estructurados, problemas, proyectos cuya realización requerirá un cierto período de tiempo, las tareas diarias del estudiante, etc. Asimismo, las respuestas pueden ser obtenidas mediante técnicas grupales, o entrevistas individuales. Se pueden pedir explicaciones y razonamientos a los alumnos a fin de que manifiesten los procedimientos de resolución seguidos, los conceptos usados y las argumentaciones lógicas correspondientes. Además, una respuesta no tiene porqué ser registrada sobre un instrumento de evaluación formal, sino que puede estar constituida por la observación cuidadosa del trabajo de los estudiantes durante el desarrollo normal de la instrucción. Todo ello nos llevará a elegir, según las circunstancias, entre diversos métodos y técnicas de observación, encuesta o medida, los cuales deberían ser conocidos por los futuros investigadores.

3. 4. Análisis de datos en Educación Matemática

Una vez recogida la información de las variables pertinentes, relativas a los contenidos matemáticos, al propio sujeto y las situaciones de evaluación o de enseñanza, el estudio de las relaciones de dependencia, implicación e interacción entre estas variables precisa el empleo de una diversidad de técnicas de análisis de datos (Afifi y Azen, 1977; Afifi y Clack, 1992).

Aunque el desarrollo de las investigaciones requerirá, en muchos casos, la colaboración de profesionales estadísticos expertos para el análisis de los datos, consideramos que todo investigador experimental debe poseer una formación básica que le permita:

- una cierta autonomía en el análisis inicial de los datos de su propia investigación;
- la comunicación con el experto estadístico;
- la comprensión e interpretación de los informes técnicos.

Ello es debido a que el proceso de análisis de datos incorpora aspectos cualitativos y específicos del problema, como la elección de las unidades de análisis y variables, del papel que desempeñan en la investigación (dependientes, independientes, concomitantes, controladas o no) escalas de medida y procesos de categorización y codificación. Estos puntos condicionan el tipo de análisis y la interpretación y, por tanto, no pueden dejarse bajo la responsabilidad exclusiva del profesional estadístico. Lo mismo puede decirse de las preguntas que guían la investigación, ya que el análisis de datos sólo cobra sentido en función de estas preguntas.

Un objetivo importante es que los investigadores adquirieran un conocimiento de las posibilidades actuales del análisis de datos, ya que, a veces, la decisión de elegir entre un enfoque u otro de la investigación dependerá de las herramientas de análisis de datos disponibles. La complejidad de los fenómenos de enseñanza-aprendizaje hace necesario con frecuencia la recogida de un gran número de variables relacionadas. A veces se restringe innecesariamente el número de sujetos o variables, o bien no llegan a analizarse adecuadamente los datos recogidos, porque no se conoce la existencia de técnicas multivariantes y técnicas de análisis de datos cualitativos. Aunque un análisis narrativo o interpretativo de los datos sea sin duda muy valioso, este tipo de análisis se complementa muy adecuadamente con la búsqueda de la estructura de interacciones entre variables, posibilitada por el análisis de correspondencias, el análisis implicativo, análisis cluster, modelos logarítmico-lineales, etc.

4. REFLEXIONES FINALES

El crecimiento de la bibliografía de investigación en Educación Matemática es exponencial, por lo que cada vez resulta más difícil hacer una selección de la misma a la hora de preparar un curso de una duración limitada. La adopción de una postura ecléctica ante las diversas teorías para la formación de investigadores nos parece escasamente productiva; se precisa hacer una selección de enfoques teóricos y metodológicos que aporten una visión del currículo e instrucción matemática coherentes y que, desde posiciones integradoras de los aportes de las diversas disciplinas, tengan en cuenta la especificidad del conocimiento matemático.

Desde 1988 hemos tenido oportunidad de impartir diversos cursos sobre los fundamentos teóricos y metodológicos de la Educación Matemática en las universidades de Granada, Zaragoza, Santiago de Compostela, Valencia y Cádiz. Nuestra reflexión sobre la práctica, unida al estudio crítico de la literatura especializada, nos ha llevado a superar un primer posicionamiento ecléctico, caracterizado por el estudio de las principales ideas de distintas tendencias y paradigmas, hacia la presentación y discusión de nuestras propias teorizaciones y las aportaciones más relevantes de la denominada escuela francesa de Didáctica de la Matemática.

En cuanto al paradigma metodológico que presentamos a nuestros estudiantes, y que estamos implementando en las tesis doctorales ya elaboradas, o en proceso de elaboración, podemos caracterizarlo por una racional combinación entre métodos cualitativos y cuantitativos. Nuestros supuestos epistemológicos y ontosemánticos sobre las matemáticas (Godino y Batanero, 1994a y 1994b) nos llevan a formular una agenda de investigación sobre las cuestiones de enseñanza-aprendizaje que requiere la recogida de datos de naturaleza diversa y al uso de diseños de investigación experimentales y cuasi-experimentales. Así mismo, el empleo de técnicas de análisis de datos multivariantes, que permitan estudiar la estructura de los conocimientos de los estudiantes y su evolución como consecuencia de actuaciones didácticas planificadas, se revela como estrictamente necesario y potente, como se ha puesto de manifiesto en el reciente Coloquio celebrado en Caen (Gras, 1995). La formación metodológica de las futuros investigadores debe, por tanto, atender a estos contenidos.

REFERENCIAS

Afifi, A. A. & Azen, S. P. (1977). *Statistical analysis: a computer oriented approach.* New York: Academic Press.

Afifi, A. A. & Clark, V. A. (1992). *Computer aided multivariate analysis*. Belmont, CA: Lifetime Learning Publ.

Artigue, M. (1989). Ingènierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 9.3, pp. 281-308.

Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1994a). *Razonamiento combinatorio.* Madrid: Síntesis.

Batanero, C. Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1994b). Epistemology and mathematics instruction: implications for curricular development. En: L. Bazzini (Ed.), Proceeding of the *Fifth International Conference on Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mahtematics Education. (pp. 9-18). (*Grado, Italy). Pavia: ISDAF.

Batanero, C., Godino, J. D., Steiner, H. G. & Wenzelburger, E. (1994). The training of researchers in mathematics education. Results from an international study. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 26, pp. 95-102.

Biehler, R., Scholz, R. W., Straser, R., & Winkelmann, B. (Eds.) (1994). Didactics of mathematics as a scientific discipline. Dordrecht: Kluwer Academic Pub.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7. nº 2, pp. 33-115.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaun de la didactique: perspective apportés par una approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 12. nº 1. pp. 73-112.

Cook, T. D. & Campbell, D. T. (1979). *Quasi-experimentation. Design and analysis issues for field setting*. Chicago: Rand Mc. Nelly Publ.

Denzin, N.K, & Lincoln, S. (1994). *Handbook of qualitative research*. London: Sage Publication.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* London: The Falmer Press.

Feldt, L. S. & Brennan, R. L. (1991). Reliability. En: R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement* (Third ed.) (pp. 105-146). New York: American Council on Education and Macmillan Publ.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994a). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 14, nº 3. pp. 325-355.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994b). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. Background paper presented at the ICMI Study 94, *"What is research in mathematics education and what are its results?*. University of Maryland.

Godino, J. D., Batanero, C. & Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

Gras, R. (Ed.) (1995). Actes du Colloque '*Methodes d'analyses statisques multidimensionnelles en didactiques des mathématiques'*. Association pour la Recherches en Didactique des Mathématiques (IUFM, Orleans).

Grouws, D. A. (Ed.) (1992). Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan.

Messick, S. (1991). Validity. En: R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement* (Third ed.) (pp. 13-104). New York: American Council on Education and Macmillan Publ.

Nissen, G. & BlomhØj, M. (Eds) (1993). *Criteria for scientific quality and relevance in the Didactics of Mathematics*. Roskilde, Denmark: Roskilde University, IMFUFA.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics.* London: The Falmer Press.

Tymoczko, T. (Ed.) (1986). New directions in the philosophy of mathematics. Boston: Kirkhauser.

ANEXO 1: TEORÍA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

b) Objetivos:

1) Presentar una perspectiva global del estado actual de la investigación en el campo de la Educación Matemática y de sus fuentes de conocimiento.
2) Explicitar y analizar las concepciones de los estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas y de la Educacion Matemática como campo de investigación.
3) Presentar y discutir teorias sobre Educación Matemática que enfatizan la especificidad del área de conocimiento y que tratan de articular los componentes epistemológicos, instruccionales y curriculares.

c) Contenidos:

1) La Didáctica de la Matemática como disciplina científica
2) Fundamentación epistemológica.
    2.1. Constructivismo social como filosofía de la Matemática
    2.2. Los objetos matemáticos y sus significados (ontosemántica matemática)
    2.3. Enfoque antropologico y ecológico de la didáctica
3) Enseñanza y aprendizaje matemático: La teoría de situaciones de G. Brousseau
4) Curriculum matemático basado en la dialéctica entre campos de problemas y herramientas conceptuales.

ANEXO 2: DISEÑO DE INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

b) Objetivos:

1) Conocer los principios básicos y la terminologìa del diseño de la investigación en Educación
2) Adquirir una visión de conjunto de los principales tipos de diseño experimental y cuasi-experimental.
3) Conocer el alcance y limitaciones de los diversos tipos de diseño y las precauciones necesarias para asegurar la validez de las conclusiones.
4) Presentar al estudiante los fundamentos de las técnicas de recogida de datos y los pasos necesarios para la construcción de los instrumentos
5) Concienciar al estudiante de la importancia que la validez y fialidad tienen en el alcance de los resultados de las investigaciones
6) Analizar ejemplos de investigaciones específicas sobre Educación Matemática, bajo el punto de vista del diseño y la construcción de instrumentos.

c) Contenidos:

1) Paradigmas de investigación y áreas de estudio
2) La investigación empírica y sus fases
3) Variables e hipótesis de la investigación

4) Métodos y técnicas de observación, encuesta y medida
5) Principios básicos del muestreo
6) El proceso de inferencia causal. Alcance de los resultados de las investigaciones
7) Diseños experimentales
8) Diseños cuasi-experimentales
9) Métodos cualitativos

ANEXO 3: ANÁLISIS DE DATOS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Objetivos:

1) Adquirir una visión general de los métodos de análisis de datos, tanto univariante como multivariante, las condiciones en que pueden ser aplicados y su utilidad en la investigación educativa.
2) Conocer los pasos necesarios para la correcta realización de un análisis de datos, así como las decisiones que pueden ser tomadas en cada uno de ellos.
3) Iniciarse en el manejo de un paquete de análisis de datos: grabación de datos, selección de programas e interpretación de los resultados.
4) Realizar y discutir el análisis de colecciones de datos tomados de investigaciones educativas.
5) Analizar críticamente los resultados de análisis de datos presentados en investigaciones sobre Educación Matemática en relación con el problema de investigación planteado y las conclusiones obtenidas en la investigación.

Contenidos:

1) Conceptos básicos de estadística: población, muestra, variables y escalas de medida; enfoques exploratorio y confirmatorio; papel del análisis de datos en las distintas fases de investigación,
2) Preparación de los datos para el análisis; tratamiento inicial de los datos
3) Estudios de asociación y correlación
4) Predicción y modelización
5) Pruebas no paramétricas
6) Representación geométrica de datos multivantes
7) Predicción y modelización multivariante

8) Técnicas de clasificación
9) Técnicas de reducción de la dimensión y representación de los datos
10) Otras técnicas de análsis de datos educativos

9

EL ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO COMO RECURSO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS[1]

Juan D. GODINO, Carmen BATANERO y Pablo FLORES

Abstract

In this article we emphasize the role that could be played by the didactical analysis of the meaning of mathematical objects and the adaptation that objects undergo in different educational institutions in mathematics teacher education. The necessity of studying the knowledge produced by didactic research into teaching and learning processes is also highlighted. Two problem situations concerning the teaching of elementary probability, which contextualise the epistemological reflection on stochastics and the study of didactic knowledge about this theme, serve as examples for this kind of analysis.

Resumen

En este trabajo resaltamos el papel que, en la formación de profesores de matemáticas, puede tener el análisis didáctico del significado de los objetos matemáticos, de las adaptaciones que experimentan en las distintas instituciones educativas y de los conocimientos producidos por la investigación didáctica sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje. Como ejemplo, se describen dos situaciones problemáticas sobre la enseñanza de las nociones estocásticas elementales que permiten contextualizar la reflexión epistemológica sobre los contenidos específicos y el estudio de los conocimientos didácticos sobre los mismos.

---

1 [Contextualising didactical knowledge on stochastics in mathematics teacher's training]. En: A. Olivier y K. Newstead (Eds), *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. University of Stellenbosch, South Africa.

CONTEXTUALIZACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS DIDÁCTICOS

En la actualidad, asistimos a un interés creciente en la educación matemática hacia la problemática planteada por la formación de profesores de matemáticas, debido, entre otras razones, al fracaso escolar, la insatisfacción consecuente de los profesores y las nuevas reformas curriculares, las cuales exigen una renovación del profesor en ciertas materias. Estas reformas plantean también un cambio de paradigma educativo, que es paralelo al desarrollo de un nuevo paradigma epistemológico en la matemática (Ernest, 1991; Cooney, 1994).

Una formación del profesor exclusivamente matemática o psico-pedagógica de índole generalista no parece suficiente, dada la complejidad cognitiva y didáctica que presentan los conceptos y métodos matemáticos específicos (Lappan y Theule-Lubienski, 1992). Por otro lado, la investigación didáctica centrada en la formación de profesores está produciendo abundante información sobre lo que podemos describir como 'conocimiento didáctico del contenido' (Shulman, 1986; Mark, 1991). En consecuencia, se está proponiendo que los cursos de formación de profesores de matemáticas contemplen diversos aspectos complementarios (NCTM, 1991; Aichele y Coxford, 1994), entre los que destacamos en este capítulo los siguientes:

- la reflexión sobre el significado de los objetos matemáticos particulares que se pretende enseñar, y el estudio de las transformaciones que experimentan los mismos para adaptarlos a los distintos niveles de enseñanza;
- el conocimiento de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas;
- la ejemplificación de situaciones didácticas, metodología de enseñanza para temas específicos y recursos didácticos específicos.

Otra cuestión complementaria sería la búsqueda de criterios y medios para llevar a cabo esta formación. Los conocimientos sobre los aspectos epistemológicos de los contenidos matemáticos y sus transposiciones didácticas, así como sobre las dificultades y obstáculos de los estudiantes, deberían ser asumidos y adaptados por los propios profesores (Clark, 1994; Cooney, 1994). Para este fin, y desde una perspectiva constructivista y social de la educación matemática, consideramos que los conocimientos didácticos tendrían que ser contextualizados en situaciones significativas para los profesores en formación (Even y Lappan, 1994), pues la metodología de los cursos de preparación de profesores tiene que reflejar los principios metodológicos deseables en la propia acción didáctica de los profesores.

Como se ve, se está proponiendo una visión de la tarea profesional del profesor basada en darle mayor importancia a los procesos de pensamiento del profesor (Shulman, 1986). Desde esta perspectiva se enfatiza el protagonismo que tiene el profesor en formación respecto a su propio proceso de formación y a la toma de decisiones en su tarea profesional. Para ello, los cursos de formación tendrían que crear las condiciones idóneas para que los profesores expliciten y comuniquen sus ideas previas en relación a su tarea profesional (Thonson, 1992, Flores, 1994). Para completar este proceso se propone la confrontación y validación de las propias creencias y concepciones frente a los resultados producidos por la investigación didáctica.

Estas nuevas circunstancias y enfoques plantean al formador de profesores el problema del diseño y desarrollo de situaciones problemáticas para la formación didáctica de los profesores, que reunan las características adecuadas para la enseñanza del conocimiento didáctico del contenido, de acuerdo con los principios mencionados. En particular, estas situaciones deberían permitir la reflexión didáctica sobre las matemáticas, el estudio de las investigaciones didácticas sobre errores y dificultades de aprendizaje, así como sobre métodos y recursos de enseñanza y su realización práctica. Será aconsejable que el profesor en formación asuma estos conocimientos como propios gracias a su contextualización , y porque les plantean dilemas profesionales que los hacen significativos, al obligarles a poner en juego sus creencias y concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.

En este trabajo vamos a presentar dos ejemplos de este tipo de situaciones problemáticas de didáctica, para el caso particular de la formación de los profesores en el campo de la probabilidad. La problemática de formación de los profesores sobre este campo reviste un interés particular, debido a que los diseños curriculares recientes adelantan y enfatizan la enseñanza de este contenido, así como a las características específicas del razonamiento y conocimiento estocástico respecto a otros temas del currículo de matemáticas.

Las situaciones presentadas, elegidas por su complementariedad desde diversos puntos de vista, permiten contextualizar la reflexión sobre el significado de las nociones estocásticas elementales y los conocimientos didácticos sobre los mismos. En nuestra propuesta enfatizamos la reflexión epistemológica sobre las ideas estocásticas fundamentales, el análisis de las dificultades y obstáculos de los alumnos, y la identificación de las correspondientes variables didácticas. Constituyen ejemplos de lo que denominaremos 'análisis didáctico del contenido matemático', que incluye el estudio del significado de los objetos matemáticos en la propia matemática y otras instituciones, el significado particular que toman en las situaciones de enseñanza y aprendizaje, así como el estudio de las relaciones de los alumnos y profesores a dichos objetos.

Para comprender mejor la problemática epistemológica y didáctica analizada en las dos situaciones mencionadas, haremos una breve descripción previa de las principales características del conocimiento y razonamiento estocástico.

CARACTERÍSTICAS DEL CONOCIMIENTO Y DEL RAZONAMIENTO ESTOCÁSTICO

Un punto importante en un plan de formación de profesores sobre un contenido matemático específico es la reflexión epistemológica sobre el mismo, ya que puede ayudar a los profesores a comprender su papel dentro de las matemáticas y otras materias, su importancia en la formación de los alumnos, así como las dificultades de los mismos en el uso de los conceptos para la resolución de problemas.

El cálculo de probabilidades ocupa una situación muy particular a este respecto. Siendo una rama joven de las matemáticas, su desarrollo formal estuvo ligado a un gran número de paradojas, lo que indica la disparidad existente entre la intuición en este campo y el desarrollo de algunos conceptos (Borovcnik y cols, 1991). A pesar de contar con una axiomática formalmente satisfactoria desde 1933, prosiguen las controversias sobre la interpretación de conceptos básicos, como los de probabilidad o independencia. Estas controversias no son de tipo técnico, ya que el cálculo formal de probabilidades, como tal, no plantea contradicciones. Los problemas que la axiomatización no ha resuelto se refieren a la naturaleza de los objetos que se representan por medio de la probabilidad. Fine (1971) analiza las diferentes posturas filosóficas y las concepciones de la probabilidad a que han dado origen, entre las que, por su interés para la enseñanza, citaremos las concepciones clásica, frecuencial, subjetiva y axiomática o formal.

Borovcnik y Peard (1996) indican también que existen resultados contraintuitivos incluso en conceptos muy elementales, mientras que en otras ramas de la matemática los resultados contraintuitivos no se encuentran hasta que se llega a un alto grado de abstracción. Por ejemplo, el hecho de que haber obtenido una racha de cuatro caras seguidas al lanzar una moneda no afecta a la probabilidad de que la siguiente moneda sea una cara, es contraintuitivo. Otra característica, señalada por Borovcnik y Peard (1996) es la diferencia entre el tipo de razonamiento probabilístico, y los modos de razonamiento lógico y causal. En el razonamiento lógico una proposición es siempre verdadera o falsa. Una proposición sobre un suceso aleatorio sólo es cierta o falsa cuando se ha realizado el experimento. Con anterioridad, sólo podemos pensar en las diferentes posibilidades y hablar de la probabilidad del suceso, lo que requiere tener un modelo del espacio muestral del experimento, que, por otro lado, no siempre es posible verificar que sea el adecuado.

Todo ello explica el gran número de concepciones erróneas en el campo de la probabilidad, junto con el hecho de que en esta materia no disponemos de la posibilidad de efectuar operaciones concretas reversibles. Aunque la simulación tiene una función muy importante en la estabilización de las intuiciones y en la materialización de los problemas probabilísticos, no da claves sobre cómo y porqué se resuelven los problemas. La justificación requerirá la aplicación del cálculo formal, o al menos de un esquema de tipo combinatorio, lo que indica la complementariedad de los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad.

Por otro lado debemos considerar la probabilidad como inseparable de la estadística, constituyendo ambas la estocástica. Algunos autores (ver Hawkins, 1990) indican la dificultad que supone la preparación de profesores en estocástica, puesto que su tarea no puede reducirse al desarrollo de estructuras conceptuales y herramientas de resolución de problemas, sino que también se deben desarrollar en sus alumnos formas de razonamiento y un sistema sólido de intuiciones correctas.

Esta dificultad aumenta por la evolución de la estadística, que se aleja cada vez más de la "matemática pura", relacionándose con las aplicaciones y con las ciencias de la computación y convirtiéndose en una "ciencia de los datos". La estocástica es difícil de enseñar porque no sólo debemos presentar los diferente modelos o fórmulas, o ilustrar sus aplicaciones. Debemos profundizar en cuestiones más amplias, consistentes en la manera de obtener conocimiento a partir de los datos, efectuar juicios de valor sobre si los modelos son apropiados a los datos y reflexionar sobre ideas controvertidas, como el azar o la causalidad.

Las estocástica es interdisciplinaria, ya que los mismos conceptos se usan en diferentes materias, donde se suponen aprendidos, para profundizar en los problemas de cuantificación de estas disciplicas, y en donde pueden adjudicárseles significados específicos o simplemente inapropiados. Sin embargo, la enseñanza formal de la estadística y la probabilidad tiene lugar en el aula de matemáticas, y los profesores suelen adaptar su visión sobre la estocástica, y el modo en que ha de ser enseñada, a los métodos de solución y patrones de razonamiento de otras ramas de la matemática.

Es notable también la estructura compleja y sistémica de los conceptos estocásticos, incluso aparentemente simples y la interrelación entre componentes matemáticos y aspectos concretos en que se aplican. Así, la idea de *media* toma un significado especial en el contexto de "esperanza de vida", donde se ligan las ideas de frecuencia relativa y proporciones, con el conocimiento de la composición de la población observada, edad, modo de vida, etc. El concepto de independencia se reduce matemáticamente a la fórmula de multiplicación de probabilidades, pero esta definición no encierra toda la problemática sobre causalidad que el individuo relaciona a menudo con el concepto de independencia.

En consecuencia, el análisis de la problemática de la formación sobre estocástica de los profesores nos permite identificar las principales características que consideramos necesario hacer conscientes a los profesores en relación al contenido matemático elegido. Las situaciones de análisis didáctico que proponemos a continuación son ejemplos que permiten articular la reflexión sobre estas características con la formación sobre el contenido matemático, su enseñanza y aprendizaje.

EJEMPLOS DE ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL CONTENIDO

En esta sección presentamos dos ejemplos de situaciones problemáticas, que hemos utilizado en cursos de formación de profesores de secundaria, con los cuales mostramos algunos aspectos básicos de lo que denominamos "análisis didáctico del contenido".

En la primera de estas situaciones (Situación A) se utilizan las respuestas dadas por alumnos de secundaria a una pregunta sobre la aleatoriedad de una secuencia de ensayos para que los futuros profesores reflexionen sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos, la diversidad de significados personales e institucionales que pueden atribuirse a los mismos y la complejidad de su comprensión. Esta actividad se relaciona también con el proceso de evaluación de los alumnos por parte de los futuros profesores

La situación B se centra en el estudio de una secuencia de enseñanza sobre las nociones estocásticas elementales (probabilidad frecuencial y laplaciana, experimentos aleatorios dependientes y probabilidad condicional), contextualizadas en un juego probabilístico. Consideramos que la participación en esta actividad y el análisis posterior va a permitir a los futuros profesores poner en juego sus concepciones sobre la probabilidad y el azar, así como analizar la naturaleza de los citados contenidos matemáticos y los momentos didácticos característicos de un modelo de enseñanza constructivista.

Otros consideraciones didácticas y sobre el propio conocimiento profesional analizadas en estas situaciones son:

- La idea de *variable didáctica* como componente que puede hacer variar el grado de éxito de los alumnos en relación a una actividad;
- Los *obstáculos epistemológicos y didácticos* como explicación de los errores y dificultades de los alumnos.

Situación A. Respuestas de estudiantes sobre la aleatoriedad de una secuencia de ensayos

La situación de estudio utiliza las respuestas dadas por alumnos de secundaria a un ítem clásico en las investigaciones sobre percepción subjetiva de la aleatoriedad (para una revisión de estas investigaciones, ver Konold y Falk, in press;).

El análisis de las respuestas, junto con las características de la tarea presentada y del conocimiento matemático implícito en las mismas sirve de reflexión sobre las nociones de *comprensión* y de *significado* de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994, 1998), así como sobre la complejidad del significado de las nociones estocásticas, y en particular el de aleatoriedad.

El sujeto involucrado en la toma de decisiones ante situaciones aleatorias será siempre miembro de distintas instituciones que le aportan distintas herramientas semióticas-instrumentales que mediatizan su acción. Generalmente, esta diversidad de instituciones suele pasar desapercibida y no se estudia en su globalidad y complejidad, por lo que resaltaremos de modo especial la diversidad de contextos institucionales involucrados en 'situaciones-problemas aleatorias'.

Actividad propuesta

Se propone a los profesores en formación analizar las respuestas obtenidas por Serrano (1996) en una investigación sobre la capacidad de reconocimiento de las propiedades de las sucesiones aleatorias por escolares de 14 y 18 años, usando el siguiente ítem, tomado de Green (1991):

Item 1: Se pidió a algunos niños lanzar una moneda 40 veces. Algunos lo hicieron correctamente. Otros hicieron trampas. Anotaron con la letra C la aparición de una cara y con X una cruz. Estos son los resultados de Daniel y Diana:

Daniel:CXCXXCCXCXCCXXCXXCCXXCXCCXXCXCXCXCXCXXCX

Diana:CXXXCXXCXCXXXCXXXXCCXXXCXXCXXCXXXXCXXXCX

¿Hicieron trampas Daniel o Diana? ¿Por qué?.

Junto con el enunciado, habría que indicar a los futuros profesores que el ítem ha sido utilizado extensamente en la investigación educativa para evaluar la concepción que tienen los alumnos de secundaria sobre las secuencias de resultados aleatorios. Algunas de estas investigaciones sobre percepción subjetiva de la aleatoriedad han tenido un fin puramente psicológico. El profesor, sin embargo está interesado en la idea de aleatoriedad, desde el punto de vista de la comprensión que muestran los alumnos y del modo de desarrollarla.

Una primera pregunta para discutir con los profesores en formación es la siguiente:

1) ¿Qué otras instituciones o colectivos de personas piensas que se interesan por problemas semejantes al mostrado en el ítem?

Este primer punto a discutir pretende que los profesores en formación reflexionen sobre la diversidad de instituciones interesadas en el problema de la aleatoriedad, con diversas finalidades. Por un lado, tenemos las instituciones educativas, las cuales, en los diseños curriculares recientes, recomiendan un nuevo enfoque frecuencial en la enseñanza de la probabilidad, que implicará la experimentación con "dispositivos aleatorios", la simulación y el uso de tablas de números "aleatorios". En el mundo de los juegos de azar (instituciones sociales/ lucrativas, tales como loterías, etc.) la intención es ganar dinero, o implicarse en situaciones emotivas de riesgo.

En la 'institución estadística' -colectivo de estadísticos profesionales- la determinación del carácter aleatorio de una secuencia de resultados es de la máxima importancia para seleccionar muestras aleatorias o asignar los sujetos al azar en los diseños experimentales. Es muy difícil y lento conseguir secuencias largas de resultados aleatorios con dispositivos mecánicos. De ahí el interés de recurrir a las tablas de números aleatorios, o a los generadores de números pseudoaleatorios, de los cuales conviene asegurar su calidad, aplicándoles los test de aleatoriedad pertinentes.

En las instituciones científicas y profesionales estas tablas de números aleatorios o los algoritmos de generación de números aleatorios se usan para resolver problemas probabilísticos complejos por medio de la simulación.

Variables del campo de problemas

Finalizada esta discusión, se continúa la actividad completando el ítem 1 con la información sobre las respuestas de los alumnos de secundaria que mostramos a continuación:

La tabla 1 muestra los resultados obtenidos por Serrano (1996) en el ítem 1, con 277 estudiantes de secundaria. Los resultados muestran una tendencia diferente en las respuestas a los dos ítems, así como en las respuestas de los dos grupos de alumnos.

	Alumnos de 14 años (n=147)		**Alumnos de 18 años (n=130)**	
	Daniel	**Diana**	**Daniel**	**Diana**
Hizo trampas	*54 (36.7)*	*83 (56.1)*	*30(23.1)*	*63 (48.5)*
No hizo	*86(58.1)*	*53 (36.1)*	*82 (63.0)*	*48 (36.9)*
No sabe	*7 (4.8)*	*11 (7.5)*	*18 (13.8)*	*19 (14.6)*

Tabla 1. *Frecuencias y porcentajes de respuestas de estudiantes de secundaria al ítem sobre percepción subjetiva de la aleatoriedad*

Las preguntas a debatir con los profesores en formación sobre la información proporcionada pueden ser las siguientes:

2) ¿Cómo puedes explicar los cambios en los porcentajes de respuestas en *los dos ítems?*

3) ¿Qué otras características propondrías cambiar en las secuencias para hacer variar estos porcentajes?

4) ¿Cómo explicarías las diferencias entre los dos grupos de alumnos?

El enunciado del ítem1 evoca un mecanismo sobre el que se pide un juicio de su aleatoriedad. Pero, a pesar de la similitud de las dos partes del ítem 1, los alumnos que participaron en la investigación de Serrano han considerado con una mayor frecuencia que Diana hace trampas, frente al caso de Daniel. Las investigaciones sobre la percepción subjetiva de la aleatoriedad muestran conductas similares que indican que los alumnos esperan que el número de caras y cruces de una secuencia de resultados aleatorios sea similar. La variación en la segunda parte del ítem de la frecuencia de caras de 19 a 12 puede explicar el cambio de respuesta de los alumnos.

Vemos, a partir de este resultado, que es posible generar multitud de ítems similares que harían variar las respuestas de los alumnos con ligeros cambios en el enunciado. Asimismo, las respuestas obtenidas podrían variar en función del tipo de alumnos y de las condiciones de evaluación. En este ejemplo, las diferencias observadas entre los dos grupos de alumnos podrían ser efecto de la edad, pero también del hecho de haber recibido el grupo de estudiantes de 18 años enseñanza de la probabilidad durante su educación secundaria.

Se pretende que el profesor en formación identifique en esta situación los distintos tipos de *variables* que la literatura sobre 'resolución de problema' considera: *variables independientes*: de la tarea, del sujeto, de la situación (contexto institucional); *variables dependientes*: del resultado, del proceso y de evaluación; variables *concomitantes.* Entre estas variables interesa identificar aquellas que pueden ser modificadas por el profesor y afectan a las estrategias de resolución, la complejidad, validez y el esfuerzo necesario para su realización por los alumnos (*variables didácticas*).

Entre las variables de tarea (sintácticas, contenido y contexto material) encontramos: el número y tipo de resultados posibles, que aquí se suponen equiprobables (sucesión de ensayos de Bernoulli); frecuencia de caras; número y longitud de rachas; distribución de la longitud de las rachas, etc.

Respecto a las variables de los sujetos, vemos ya que en la investigación citada hay dos grupos diferentes de alumnos (14 y 18 años), que podría también variar en la enseñanza recibida, interés hacia la tarea, capacidades, etc.

Por último, también se puede cambiar el contexto institucional en que el ítem se utiliza, que en este caso es el escolar, con una intención evaluativa. Cambiando de manera sistemática los valores posibles de estas variables obtenemos un sistema de enunciados que podemos describir como *el campo de situaciones-problemas aleatorias*, en que una persona debe decidir si una secuencia de resultados observados, o producidos artificialmente, es generado por un mecanismo aleatorio, o podemos considerarlo como tal a efectos prácticos.

Significados personales e institucionales de la aleatoriedad

Los porcentajes de respuestas afirmativas o negativas al ítem 1en cada uno de los grupos de alumnos de la investigación citada nos han proporcionado ya una cierta información. Sin embargo, se logra una mayor comprensión de los razonamientos subyacentes, cuando se analizan los argumentos en que los alumnos han basado su decisión. Estas son nuevas cuestiones que podemos proponer a los profesores en formación:

Algunas de las razones que dieron los alumnos de la investigación citada para justificar que Daniel o Diana hicieron trampas fueron las siguientes:

a) Hay un patrón demasiado regular en la secuencia, los resultados son muy regulares, casi alternándose;

b) Las frecuencias de caras y cruces son demasiado diferentes;

c) Hay rachas demasiado largas de un mismo resultado; debieran alternarse más las caras y cruces.

5) ¿Cuáles de estos argumentos te parece correcto o incorrecto? ¿Cómo explicarías las respuestas incorrectas?

6) ¿Cuál de estos argumentos piensas que se empleó preferentemente en cada ítem? ¿Qué otros argumentos correctos e incorrectos esperarías para justificar que no se hizo trampas?

7) ¿En qué se parecen o diferencian estos argumentos de los alumnos a los que emplearía un estadístico profesional cuando realiza sus pruebas de aleatoriedad, por ejemplo, de un programa de ordenador?

En los argumentos de los alumnos de secundaria se aprecia la complejidad del modelo de aleatoriedad, pues diferentes alumnos se centran en diferentes propiedades de las secuencias presentadas y la corrección o incorrección del argumento depende no sólo de si la respuesta es positiva o negativa, sino a cual de las dos secuencias se refieren.

Vemos que los escolares manifiestan unas conductas muy sofisticadas para resolver el problema propuesto. Ante el enunciado del problema, algunos escolares cuentan el número de caras de las secuencias que se les presentan. Si, como en el primer caso, se obtiene un balance entre el número de caras y cruces, responden que Daniel jugó correctamente con la moneda (19% de los alumnos). En el caso de que el número de cruces estuviese más desequilibrado, como en el segundo, dirían que el niño hizo trampas (2.5% de alumnos). Para ellos, estas frecuencias no corresponderían a lo que esperan en una sucesión aleatoria de caras y cruces.

Este tipo de respuestas sería un ejemplo de actuación o práctica significativa para resolver el problema dado. Lo que hace que las prácticas sean significativas para el sujeto que las realiza es que para él tienen una funcionalidad en la resolución del problema (para tomar la decisión sobre si Daniel o Diana hicieron trampas), y en comunicar y argumentar al investigador su solución. El sujeto calcula las frecuencias de caras y cruces en la sucesión dada y las compara con las esperadas, aplicando un modelo de distribución teórica de equiprobabilidad de los dos resultados en cada ensayo. Si las frecuencias observadas se apartan, en su opinión, demasiado de las esperadas, rechaza la hipótesis de que la sucesión sea aleatoria.

Otra práctica significativa para el alumno podría ser identificar las rachas largas. Si encuentra una racha de cuatro o cinco resultados seguidos del mismo tipo, rechazaría la sucesión como aleatoria (30.1% en la sucesión de Diana) . El mecanismo subyacente es la 'recencia negativa' explicada en la teoría de Kahneman y sus cols. (1982) por la 'heurística de la representatividad'. Los sujetos que manifiestan esta heurística esperan que una muestra de resultados aleatorios tenga características similares al proceso que la genera, incluso en series cortas de ensayos.

El alumno podría haber hecho otras cosas para resolver el problema; por ejemplo,

- analizar el orden en que se presentan las caras y las cruces y decidir que es demasiado regular para ser aleatorio (35.3% en el ítem 1, 6% en el ítem 2), resultado que también se explica por la heurística de la representatividad.
- decidir que no se hizo trampas simplemente porque el resultadodel

experimento aleatorio se considera impredecible, razonando de acuerdo al '*outcome approach'* descrito por Konold (1989) (30.6% en el primer ítem y 29.6% en el segundo).

El conjunto de prácticas personales que pueden manifestarse en un contexto escolar como el descrito es muy diferente al de los estadísticos profesionales ante situaciones aleatorias similares. Aunque en las prácticas del alumno se hallan presentes elementos del contraste de hipótesis de manera implicita (probabilidad teórica, frecuencia esperada si la hipótesis fuera cierta, frecuencia observada, ...), el estadístico profesional los empleará de manera explícita y formal. Por ejemplo, para comparar las frecuencias de caras observadas con las esperadas, aplicará una prueba de adherencia de ajuste, eligiendo un nivel de significación y, utilizando los valores críticos de la distribución Chi cuadrado, dará un carácter 'objetivo' a su decisión, al rechazar o no rechazar la tabla como aleatoria.

El número y tipo de pruebas de aleatoriedad del estadístico profesional sería también mucho más complejo y completo que el del alumno. Además, mientras que el escolar podría aceptar la hípótesis de que la sucesión es aleatoria, el estadístico se limitaría a decir que no ha encontrado motivos para rechazar la tabla como no aleatoria, debido a la lógica del contraste de hipótesis. Asimismo, ciertos criterios utilizados subjetivamente por escolares y sujetos sin preparación estadística para rechazar una sucesión como aleatoria son falsos desde el punto de vista de la institución estadística. Por ejemplo, la práctica personal consistente en argumentar que una sucesión no es aleatoria porque contiene rachas 'largas' sería inadecuada desde un punto de vista estadístico.

Objetos matemáticos y su complejidad

A la vista del análisis anterior, podemos pasar a discutir con los profesores en formación sobre la naturaleza epistemológica de los objetos matemáticos, por lo que finalizaríamos la actividad con las siguientes preguntas:

8) ¿Cómo podríamos definir la aleatoriedad, de una forma simple? ¿Creeis que tiene sentido hablar de la aleatoriedad en términos absolutos? ¿Es una propiedad de ciertos objetos o fenómenos o un modelo con el que los analizamos?

9) ¿Hay algún procedimiento que nos permita saber con seguridad que un dispositivo, como un dado o una moneda, produce resultados aleatorios?

Una primera consecuencia de esta discusión es que no existe una definición comunmente aceptada de aleatoriedad y que las proporcionadas desde la matemática no permiten determinar con seguridad si una secuencia es o no aleatoria. (Puede verse, por ejemplo, la discusión de Fine (1971), donde se describen diferentes aproximaciones a la definición de secuencia aleatoria desde un punto de vista matemático, a partir de la teoría de la complejidad computacional, y de los algoritmos de selección).

El objeto matemático 'aleatoriedad' no tiene, además, las mismas propiedades características en las distintas instituciones, e incluso para cada miembro de dichas instituciones, ya que hay diferencias esenciales en los sistemas de prácticas correspondientes.

En la enseñanza secundaria solemos identificar como suceso o secuencia aleatoria la producida por un proceso aleatorio. Para un estadístico que trabaja poniendo a punto un algoritmo de generación de números aleatorios, puede desligarse la aleatoriedad de la secuencia de resultados y del mecanismo que la genera (algoritmo determinista). Por otro lado, como señala Kyburg (1974), la idea de aleatoriedad se compone de los cuatro términos siguientes:

- el objeto del que se dice que es aleatorio;
- el conjunto o clase del cual el objeto aleatorio es miembro (población o colectivo);
- la propiedad con respecto a la cual el objeto es un miembro aleatorio de la clase dada;
- el conocimiento que la persona que emite el juicio de aleatoriedad tiene del fenómeno.

Para Kyburg, lo que se considera aleatorio depende de nuestro conocimiento. Por ejemplo, si he lanzado un dado y observo el resultado obtenido, este resultado ya no es aleatorio para mi, aunque puede serlo para otra persona que no conozca el resultado. En definitiva, es preferible considerar la aleatoriedad como un modelo matemático que aplicamos a ciertas situaciones, porque nos resulta útil para comprenderlas, y no como una propiedad que pertenezca a las mismas.

Un niño podría pensar, por ejemplo, que las cifras decimales del número π constituyen una secuencia aleatoria, debido a su apariencia desorganizada. Además, las investigaciones psicológicas ponen de manifiesto que, en general, los sujetos asignan más alternancias de los distintos resultados que las previstas teóricamente a las secuencias aleatorias. La conocida '*falacia del jugador*' sería una consecuencia de este diferente significado de la aleatoriedad para sujetos no entrenados estadísticamente y estadísticos expertos o profesores de estadística.

Ahora bien, ¿de dónde procede el carácter absoluto y universal que la institución matemática atribuye a sus objetos? Pensamos que este carácter procede del punto de vista adoptado por los 'técnicos matemáticos', en el cual se propone la búsqueda de lo esencial entre situaciones-problemas, contextos, teorías, etc. Ello les permite 'ver' las restantes situaciones y objetos como 'casos particulares' de sus constructos. Esta actitud matemática suprime las 'barreras institucionales ', lo cual es necesario y productivo desde el punto de vista de la producción matemática, pero es insuficiente para el análisis cognitivo y didáctico de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La noción de comprensión

Finalmente, la discusión sobre la complejidad del significado de los objetos matemáticos conduce de forma inmediata a la reflexión sobre la comprensión de estos objetos. Sin duda, en un acto de comprensión hay un componente psicológico: "es la experiencia mental de un sujeto por medio de la cual relaciona un objeto (signo) con otro objeto (significado)" (Sierpinska, 1994, pg.). Pero gran parte de la actividad educativa gira en torno a la emisión de juicios sobre la comprensión de sus sujetos sobre los saberes pretendidos.

En estas circunstancias, es necesario confrontar las prácticas significativas personales con las expectativas y estándares fijados por la institución educativa correspondiente. La comprensión no involucra simplemente actos mentales sino también institucionales, ya que las instituciones educativas pretenden que sus miembros se apropien de unos significados específicos, socialmente convenidos. Un juicio de 'buena comprensión' por un sujeto del caracter aleatorio de una secuencia de resultados de un experimento implicaría una 'buena concordancia' de los significados personales e institucionales correspondientes.

Situación B. Analisis didáctico de una secuencia instruccional: estrategia ganadora en un juego probabilístico

El segundo tipo de actividad que vamos a analizar empieza con la realización práctica con los profesores en formación de un juego y de la búsqueda de una estrategia ganadora. Posteriormente, analizamos, desde el punto de vista didáctico, el juego y el proceso de resolución, ya que esta situación-problema puede ser utilizada por los propios profesores con sus alumnos de secundaria. La situación está basada en la clásica paradoja de Bertrand y tiene como objetivo particular la confrontación de las concepciones frecuencial y laplaciana de la probabilidad, así como la contextualización de las nociones de experimentos aleatorios dependientes y probabilidad condicional. La actividad completa, que ha sido utilizada en nuestros cursos de formación de profesores de secundaria sobre didáctica de las nociones estocásticas, permite, además, reflexionar sobre las ideas estocásticas fundamentales (Heitele, 1975), el papel de la resolución de problemas en la construcción del conocimiento matemático, así como sobre otros aspectos de la '*teoría de situaciones didácticas'* de Brousseau (1986).

Descripción de la situación y gestión de la clase

Se propone a los profesores en formación experimentar ellos mismos una situación didáctica que ha sido diseñada para la enseñanza de la probabilidad en el nivel de secundaria. Los profesores en formación harán el papel de alumnos y el formador de profesores el papel del profesor.

La actividad se inicia planteando el siguiente juego:

> *Se toman 3 fichas de la misma forma y tamaño, de las cuales una es roja por ambas caras; otra es azul por una cara y roja por la otra, y la tercera es azul por las dos caras.*
>
> *El profesor coloca las tres fichas en una caja, que agita convenientemente, antes de seleccionar una de las tres fichas, al azar. Muestra, a continuación, una de las caras de la ficha elegida, manteniendo la otra tapada, pidiéndo a sus alumnos que adivinen el color de la cara oculta. Una vez hechas las apuestas, el profesor muestra la cara oculta. Cada alumno que haya acertado en la predicción efectuada, consigue un punto.*

Una vez comprendido en qué consiste el juego, y tras haber hecho algunos ensayos, se pide a los estudiantes (en este caso los profesores en formación) que busquen una estrategia que les permita obtener el mayor número de puntos (aciertos) en una serie larga de repeticiones del juego. Cada estudiante pensará individualmente su estrategia, sin discutirla con los compañeros, ya que van a competir entre si. El trabajo se organiza en las fases que describimos a continuación.

FASE 1: Comienzo del juego y búsqueda de una estrategia óptima

Se comienza el juego con una serie de 10 extracciones, en cada una de las cuales los estudiantes anotan el color previsto para la cara posterior que para ellos no es visible. Un alumno actúa como ayudante del profesor (en este caso el formador), anotando el color real de la cara oculta, colocándose, para ello, detrás del profesor para poder ver el color de la cara que se oculta a los restantes compañeros. Finalizada la primera serie de diez extracciones, el alumno-ayudante lee en voz alta el color que ha resultado para la cara oculta en cada extracción y cada estudiante calcula su porcentaje de éxito, comparando con el de sus compañeros y viendo quíenes son los ganadores.

FASE 2: Análisis de la estrategia elegida y nueva confrontación empírica

Se da un poco de tiempo para que los estudiantes vuelvan a pensar personalmente sobre la estrategia que han usado y describirla por escrito (formulación). (Pueden también discutirla por parejas y proponer una estrategia común). Entre las estrategias que suelen elegir los estudiantes podemos citar las siguientes, que han sido propuestas por nuestros propios estudiantes (profesores en formación) al trabajar con esta situación:

A: Tomar alternativamente azul y roja

B: Tomar siempre azul (o roja)

C: Dar respuestas al azar

D: Dos azules/una roja (o similar)

E: Elegir el color de la cara mostrada

F. Elegir el color contrario de la cara mostrada.

Una vez formuladas por escrito, se intercambian las estrategias escritas en las cuartillas, jugándose otra racha de 10 extracciones empleando cada alumno la estrategia de otro compañero. Con ello se pretende dar la oportunidad de expresar las ideas por escrito, de manera que otra persona pueda interpretarlas. Se confrontan los resultados y si es necesario se repite esta fase para aumentar el número total de experimentos. Generalmente, a medida que aumenta el número de datos, algunas estrategias iniciales serán abandonadas, porque los resultados no coinciden con las expectativas iniciales de los alumnos. Finalmente, los estudiantes se deciden claramente por una o varias estrategias como favoritas, aunque algunos pudieran conservar su estrategia inicial, pensando que el fracaso ha sido debido al carácter aleatorio del experimento.

FASE 3: Justificación de la estrategia elegida

Se formulan las posibles estrategias en la pizarra. Se forman equipos partidarios de cada estrategia que exponen y discuten las argumentaciones a favor o en contra de la estrategia elegida.

El objetivo explícito pretendido al plantear este problema es la búsqueda de la estrategia ganadora; es pues, un problema de encontrar. Pero también se debe probar que la estrategia elegida es la óptima; por tanto, hay también un problema de probar en esta situación problemática. Cuando los estudiantes intentan probar a sus compañeros por qué su estrategia es la que proporciona más aciertos, es cuando se ponen de manifiesto tanto los razonamientos correctos, como las posibles concepciones erróneas. Serán los mismos compañeros quienes señalen, en estos casos, donde se encuentra el error. Durante esta fase se plantea a los alumnos cuestiones similares a las siguientes:

¿Qué tipo de razonamiento has dado (o darías) para validar que tu estrategia es la óptima?

¿Piensas que es igualmente válido el argumento que se basa en la experimentación que el basado en consideraciones lógicas y combinatorias?

¿Podrías probar que tu estrategia es la mejor, sólo con la experimentación?

No es suficiente el hecho empírico de que una estrategia dada haya ganado en una serie particular de ensayos para mostrar que dicha estrategia sea la mejor en otra serie futura de jugadas. Un análisis a priori de los resultados esperados en el juego y sus diferentes probabilidades, muestra un número esperado de 4 aciertos por cada 6 jugadas. Este resultado se obtiene aplicando el teorema de Bayes, o bien simplemente mediante un diagrama en árbol como el de la figura 1.

El mismo tipo de análisis, aplicado al resto de las estrategias da un número menor esperado de aciertos, lo que muestra que E es la estrategia óptima. Esto no quiere decir que en una serie de 10, 20, ... 50 juegos, la estrategia E conduzca a ganar con seguridad, debido al carácter aleatorio del juego. Sin embargo, una persona racional (que tomase sus decisiones aplicando el principio de maximizar la ganancia esperada) debería preferir el uso sistemático de la estrategia E (en ausencia de informaciones que induzcan a violar el principio de indiferencia).

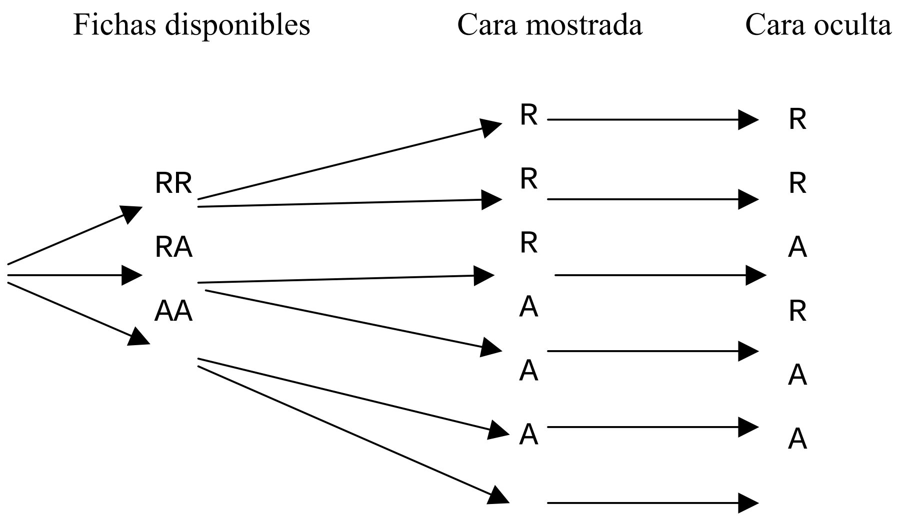


Figura 1. *Diagrama en árbol*

Reflexión didáctica

Hasta llegar a este punto, la actividad realizada con los profesores en formación es similar a la que ellos mismos podrían realizar con sus alumnos de secundaria y la finalidad pretendida es doble: Por un lado, se muestra a los profesores un ejemplo de situación didáctica en el campo de la probabilidad y el modo de trabajar con ella con sus propios alumnos. Por otro, puede servir para que los propios profesores actualicen o completen sus conocimientos probabilísticos.

Una vez finalizada la actividad, la formación de los profesores se completa con el análisis didáctico de la misma, desde un doble punto de vista, que describimos a continuación.

Reflexión sobre el contenido matemático

En el problema planteado -buscar la estrategia de juego óptima- los alumnos han tenido ocasión de usar distintas nociones u objetos matemáticos. Una primera parte de la reflexión didáctica sobre el contenido matemático consiste en analizar los objetos matemáticos (conceptos, propiedades, ...) que intervienen de algún modo en la situación.

El principal objeto matemático contextualizado en la situación es el tipo de razonamiento que permite validar la estrategia ganadora: el rechazo de la validación empírica como soporte de la decisión en aquellas situaciones en que es posible aplicar la hipótesis de equiprobabilidad, frente a la argumentación lógica y combinatoria. En este caso podemos aplicar la concepción clásica o laplaciana de la probabilidad de un suceso como cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles. Sin embargo, la simetría de los sucesos elementales deber ser convencionalmente asumida por el sujeto, lo que requiere una atención especial. La superioridad de la validación lógica frente a la empírica descansa, por tanto, en la aceptación implícita (convencional) del principio de simetría o indiferencia y de la independencia de los experimentos sucesivos, lo que a menudo requiere un juicio subjetivo.

Si, por ejemplo, el soporte del juego probabilístico fuera un dispositivo no simétrico (un dado lastrado, chinchetas, etc) se tendría una situación prototípica de uso de la concepción frecuencial de la probabilidad. En esta concepción la probabilidad se define como el límite al cual tendería la frecuencia relativa del suceso en una serie larga de ensayos. No obstante, es necesario hacer ver la posibilidad de oscilaciones en la frecuencia relativa, en especial, en un número limitado de ensayos. Además, una vez conocida la probabilidad de los sucesos elementales, se debieran aplicar las reglas probabilísticas y combinatorias para el cálculo de probabilidades más complejas. Sin embargo, en las ocasiones en las que el Cálculo de Probabilidades es demasiado complicado, la simulación permite obtener una estimación de las probabilidades de los sucesos, en especial cuando el número de ensayos es lo suficientemente elevado. En consecuencia, este juego contextualiza el debate existente entre las diversas concepciones de probabilidad, y permite mostrar la insuficiencia y complementariedad de estas distinticas concepciones.

Es notable observar, asimismo, cómo en esta situación -y en cualquier situación aleatoria simple como la del lanzamiento de una moneda- aparecen latentes las ideas estocásticas fundamentales descritas por Heitele (1975). Este autor denomina ideas fundamentales aquellas que podrían estar presentes a lo largo del currículo desde la escuela hasta llegar a la universidad, con diversos grados de formalización y que están implícitas en la mayor parte de las situaciones probabilísticas. Ademas de la idea de suceso, probabilidad y convergencia de las frecuencias relativas, cita las operaciones combinatorias, la adición y multiplicación de probabilidades, independencia y dependencia estocástica, la idea de variable aleatoria, equidistribución y principio de simetría, esperanza y el muestreo. El análisis didáctico de esta situación podría dar ocasión de reflexionar con los profesores en formación sobre cuáles son las ideas estocásticas fundamentales y cuál el grado de formalización con las que debiéramos presentarlas a los alumnos de secundaria.

Reflexión sobre el contenido didáctico

Otra reflexión más general es sobre el papel de la resolución de problemas, la experimentación y el juego en la enseñanza de las matemáticas, así como el que desempeñan la discusión colectiva de las soluciones a los problemas, y de las argumentaciones dadas por los alumnos. El papel del profesor en todo este proceso sería otro punto de debate.

El desarrollo de esta situación didáctica ofrece, en consecuencia un entorno que permite contextualizar los distintos momentos didácticos característicos de la teoria de situaciones (Brousseau, 1986):

- el momento de la acción, investigación personal, o en cooperación, que consiste, en este caso, en la búsqueda de la estrategia ganadora, apoyándose en las conjeturas previas, el ensayo experimental de la misma, y las revisiones que sean necesarias, en vista de los datos obtenidos;
- el momento de la formulación: simbolización o descripción de la estrategia elegida, para que otra persona sea capaz de comprender la estrategia y jugar siguiendo esta estrategia;
- el momento de la comunicación: intercambio e interpretación de las consignas producidas;
- el momento de la validación: búsqueda de argumentos que convenzan a los compañeros de la bondad de la estrategia, explicación y verificación de estos argumentos, debate, en caso de conflicto;
- el momento de la institucionalización. presentación, o explicación de la solución y de la argumentación, basándonos en los conocimientos previos matemáticos de los alumnos y en los nuevos conocimientos adquiridos a lo largo del juego; en particular la idea de espacio muestral en el experimento compuesto y probabilidad condicional.

Los objetos matemáticos son contextualizados en la situación, obteniendo los sujetos que la resuelven un conocimiento personal sobre los mismos. El principal trabajo del profesor es lograr la descontextualización y despersonalización de los conocimientos mediante el complejo juego de la dialéctica útil-objeto.

La situación puede servir como ocasión de uso de las nociones matemáticas de experimento compuesto y probabilidad condicional, en caso de que el alumno las conociera de antemano (modelización). Pero también, cuando estas ideas son nuevas para el estudiante, la situación sirve para mostrar su necesidad; como contextualización y personalización de estos objetos matemáticos que serán después descontextualizados y declarados como objetos culturales compartidos. Además, como hemos indicado, la situación didáctica planteada permite confrontar dos concepciones epistemológicas sobre la probabilidad: la concepción laplaciana, basada en la simetría de índole estadística, principio de indiferencia o de razón insuficiente, y la concepción frecuencial, basada en la estabilidad de las frecuencias relativas.

OBSERVACIONES FINALES

Al comparar las situaciones propuestas entre si, podemos analizar aspectos complementarios desde el punto de vista matemático y didáctico.

Desde el punto de vista del análisis que se hace de la aleatoriedad, la primera situación parte de un experimento que ya se ha efectuado y cuya aleatoriedad debe ser juzgada a partir de los datos obtenidos (estudio *estadístico* a posteriori de dicho experimento). En la segunda se trata de dar una predicción de los resultados del experimento, antes de la obtención de datos, a partir del análisis de la estructura del mismo (estudio *probabilístico* a priori del experimento).

Las situaciones analizadas permiten también ejemplificar diferentes visiones aplicables a la matemática en general:

- La visión *formalista del conocimiento matemático* , que permite validar la mejor estrategia en el juego mediante el uso de una teoría matemática existente, en este caso, la combinatoria;
- La visión *empírica,* que enfatiza el papel de la experimentación en matemáticas, y el tipo de validación que proporciona: una actuación matemática (una estrategia) se valida mediante conocimiento estadístico, si, al emplearla proporciona unos mejores resultados a la larga.
- La visión *estructural-analítica*: la secuencia de ensayos se juzga aleatoria mediante el análisis de su estructura y la confrontación con las propiedades del modelo matemático esperado.

La primera actividad (decidir si otro alumno hizo trampa) implica menos al alumno que la realiza que la segunda (jugar y elegir una estrategia para ganar un juego). También esta segunda muestra al profesor más claramente la dificultad de casar los aspectos actitudinales y las intuiciones de los alumnos con los aspectos formales, especialmente en el campo de la probabilidad.

Como conclusión final de nuestro trabajo deducimos que la preparación didáctica de los profesores de matemáticas debe capacitarles para realizar análisis didácticos similares a los presentados. Los dos ejemplos de situaciones descritas en este trabajo, para el caso de la probabilidad, pueden servir de pauta para diseñar situaciones similares referidas a otros contenidos matemáticos. Este tipo de análisis podría ser el eje de los cursos de formación de profesores, tanto desde el punto de vista matemático como didáctico.

REFERENCIAS

Aichele, D. B. & Coxford, A. F. (eds): 1994, *Professional Development for Teachers of Mathematics ,* Yearbook 1994, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, V. A.

Borovcnik, M., Bentz, H. J. & Kapadia, R.: (1991), 'A Probabilistic Perspective', en R. Kapadia & M. Borovcnik (eds.), *Chance Encounters: Probability in Education* (27-73), Kluwer A. P., Dordrecht.

Borovcnik, M. & Peard, R.: 1996, 'Probability', en A. Bishop et al. (eds), *International Handbook of Mathematics Education.* Kluwer, A. P., Dordrecht.

Brousseau, G.: 1986, 'Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7 (2), 33-115.

Clarke, D.: 1994, 'The Key Principles from Research for the Professional Development of Mathematics Teachers', en Aichele, D. B. & Coxford, A. F. (eds) (p. 37-48).

Cooney, T. J.: (1994), 'Teacher Education as an Exercice in Adaptation', en D. B. Aichele & A. F. Coxford (eds) (p. 9-22).

Ernest, P.: 1991, *Philosophy of Mathematics Education*. The Falmer Press, London.

Even, R. & Lappan, G.: 1994, 'Constructing Meaningful Understanding of Mathematical Content', en Aichele, D. B. & Coxford, A. F. (eds) (p. 128-143).

Falk, R. & Konold, C.: in press, 'Making Sense of Randomness: Implicit Encoding as a Basis for Judgment', *Psychological Review.*

Flores, P.: 1994, *Concepciones y Creencias de los Futuros Profesores sobre las*

Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje. Evolución durante las Prácticas de Enseñanza. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Fine, T. L.: 1971, *Theories of Probability. An examination of foundations.* Academic Press, London.

Green, D. R.: 1991, 'A Longitudinal Study of Children's Probability Concepts', en D. Vere-Jones (ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 320-328), International Statistical Institute, Voorburg.

Godino, J. D. & Batanero, C.: 1994, 'Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos', *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (3), 325-355.

Godino, J. D. & Batanero, C.: 1998, 'Clarifying the Meaning of Mathematical Objects as a Priority Area of Research in Mathematics Education', en J. Kilpatrick & A. Sierpinska (eds.), *ICMI Study Publication on the theme Research in Mathematics Education* Kluwer, A. P., Dordrecht.

Heitele, D.: 1975, 'An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas', *Educational Studies in Mathematics* 6, 187-205.

Hawkins, A. (de.): *Training Teachers to Teach Statistics*, International Statistical Institute, Voorburg, The Netherlands.

Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (eds): 1982, *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases,* Cambridge University Press, Cambridge.

Kiburg, H. E.: 1974, *The Logical Foundations of Statistical Inference*, Reidel, Boston.

Konold, C.: 1989, 'Informal Conceptions of Probability', *Cognition and Instruction* 6, 59-98.

Lappan, G. & Theule-Lubienski, S.: (1992), 'Training Teachers or Educating Professionals? What are the Issues and How are they Being Resolved?', en D. F. Robitaille (ed.) *Selected Lectures from the 7th International Congress on Mathematics Education,* Les Presses de l'Université de Laval, Saint Foy, Canada.

National Council of Teachers of Mathematics: 1991, *Professional Standards for Teaching Mathematics.* The Council, Reston, VA.

Serrano, L.: 1996, *Significados Institucionales y Personales de Objetos Matemáticos Ligados a la Aproximación Frecuencias de la Enseñanza de la Probabilidad*. Ph. Dissertation, University of Granada.

Shulman, L.: 1986, 'Paradigm and Research Programs in the Study of Teaching: A contemporary perspective', en M. C. Witrock (ed.) *Handbook of Research on Teaching* (p. 3-36), Macmillan, New York.

Sierpinska, A.: 1994, *Understandong in Mathematics,* Falmer Press, London.

Thompson, A. G.: 1992, ‘ Teachers’ Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research’, en D. A. Grows (ed.), *Handbook on Mathematics Teaching and Learning* (p. 127-146), Macmillan, New York

10

EL ANÁLISIS DE DATOS COMO ÚTIL Y OBJETO DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA[1]

Carmen BATANERO, Juan D. GODINO y Angustias VALLECILLOS

Resumen

En los trabajos de índole etnoestadística sobre investigaciones en ciencias sociales y experimentales se ha puesto de manifiesto la existencia de dificultades y errores en la aplicación de los conceptos y procedimientos estadísticos. Debido a la naturaleza matemática de los conceptos y a los procesos didácticos implicados, en este trabajo analizamos el interés de abordar, desde la perspectiva de la Didáctica de la Matemática, estudios sistemáticos sobre esta problemática. El objetivo de este trabajo es atraer la atención de los investigadores en Didáctica de la Matemática hacia dos núcleos de interés.

(1) La comparación del papel actual del análisis de datos en la investigación frente a sus posibilidades. De este estudio se deduce la necesidad de un cambio de actitudes hacia la Estadística y de una mayor participación de los investigadores en los procesos de diseño de la investigación y análisis de los datos, como medio de mejorar la calidad global de la investigación.

(2) El diseño de planes de formación en razonamiento estadístico y análisis de datos para estudiantes de doctorado y maestría, basados en un estudio previo de dificultades, sesgos y obstáculos sobre este campo conceptual entre los propios investigadores.

En resumen, en este trabajo queremos resaltar el hecha de que el empleo del útil estadístico en las Ciencias experimentales y sociales, en general, y en la didáctica de la matemática, en particular, se convierte, en esta área de conocimiento, en objeto específico de estudio, debido a la naturaleza matemática de los conceptos y a los procesos didácticos implicados.

[1] *Educación Matemática*, 4(1), 46- 53 , 1992

INTRODUCCIÓN

La investigación en distintas ciencias experimentales y sociales y, en particular, en didáctica de la matemática necesita frecuentemente recoger y analizar datos sobre los fenómenos objeto de su estudio. En consecuencia, los conceptos y procedimientos estadísticos y las técnicas de análisis de datos, tanto cualitativos como cuantitativos, deben ser tema de consideración y debate en el seno de la comunidad de investigadores.

Entre los diferentes sistemas didácticos, un subsistema de enseñanza de especial importancia para la didáctica de la matemática lo constituyen los cursos de doctorado y maestría. Dentro de estos cursos, los conceptos y procedimientos de análisis de datos y, en general el razonamiento estadístico, constituyen una materia obligada. Como indican Harris y Kanji (1988), un conocimiento básico estadístico en los especialistas de las diferentes disciplinas es necesario para realizar por sí mismos las tareas estadísticas rutinarias específicas de sus disciplinas, para reconocer los errores estadísticos en los trabajos de su especialidad y para reconocer las situaciones en que precisan ayuda de un estadístico profesional. En el caso de la Didáctica de la Matemática, esta formación presenta además un carácter "recursivo": una mejor preparación de los investigadores inducirá una mejora en los resultados de la investigación y estos resultados, a su vez, influyen en la mejora de la enseñanza.

Douady (1986) ha llamado la atención sobre dos modos de funcionamiento de un concepto matemático: como útil y como objeto. "Un concepto es útil cuando focalizamos nuestro interés sobre el uso que se hace de él para resolver problemas... Por objeto, entendemos el objeto cultural que tiene su lugar en un edificio más amplio que el saber sabio en un momento dado, reconocido socialmente" (pág. 9).

Nuestro propósito es llamar la atención en el modo particular de funcionamiento del objeto de saber que denominamos análisis de datos como herramienta para resolver problemas de investigación. Consideramos que el análisis de la dialéctica útil-objeto para este saber particular, en los cursos de formación de investigadores, es un nuevo "objeto" de estudio para la Didáctica. Este sentido de la palabra "objeto", como tema o campo de estudio para la investigación didáctica, es el que deseamos destacar en este trabajo.

ESTADÍSTICA Y ANÁLISIS DE DATOS

Como indica Benzecri (1982) los probabilistas del siglo XVIII fundan la estadística moderna a partir de las aplicaciones a la demografía y el desarrollo de la teoría de los errores. A pesar de su juventud, esta rama de las matemáticas es, sin embargo, una de las que mayor aplicación y desarrollo cuenta en la actualidad. A partir de las necesidades de muchas ciencias diferentes se han ido desgajando de ella ramas interdisciplinares específicas como la biometría, la psicometría, la sociometría, etc. Los resultados teóricos en estadística obtenidos en estas diferentes ramas han sido de tal importancia, que han mostrado su utilidad general, pudiéndose hablar aquí realmente de una ciencia transdiciplinar en que las fronteras de lo que corresponde esencialmente a la estadística y lo que es propio de cada una de sus aplicaciones no quedan, con frecuencia, claramente delimitadas.

El advenimiento de los ordenadores ha permitido una rápida difusión y un uso intensivo de las técnicas estadísticas multivariantes y su aplicación al análisis de colecciones de datos progresivamente más diversos. Esto ha dado lugar a un nuevo enfoque que está recibiendo el nombre de Análisis de datos, especialmente en Francia, donde se han puesto a punto los métodos de análisis taxonómico y análisis de correspondencias. Detrás de este término hay toda una filosofía de investigación: análisis multivariante, extensión de las posibilidades de análisis a escalas de medida nominales y ordinales, enfoque exploratorio frente al confirmatorio, complementación de los aspectos probabilísticos con otros geométricos, topológicos y numéricos. Todo ello hace posible el estudio simultáneo de un gran número de hechos, con objeto de descubrir su estructura global, complementando, mediante la inducción y la síntesis, el análisis y la deducción posibilitados por el paradigma experimental.

EL ANÁLISIS DE DATOS COMO ÚTIL EN LA INVESTIGACIÓN

Una primera faceta de estudio, que pretende encuadrarse en la investigación de carácter metodológico, es el análisis del papel que el análisis de datos está desempeñando como herramienta en la investigación experimental. Este papel está condicionado por las actitudes hacia la estadística por parte de los investigadores, que podemos clasificar en un continuo situado entre dos polos extremos.

El primero de estos extremos es la de los que creen que con unas técnicas apropiadas de análisis sería posible conseguir unos resultados extrordinarios a partir de cualquier conjunto de observaciones; es el análisis adecuado lo que hace una buena investigación. Esta creencia puede llevar al empirismo exagerado y al olvido de la teoría, sin la cual ningún conjunto de datos puede obtener su sentido.

En la actualidad esta postura es especialmente peligrosa, debido a la existencia de paquetes de programas para el análisis de datos, que permiten la aplicación de estas técnicas de un modo rápido y sencillo. Ello ha llevado al empleo inadecuado de las mismas, como señala White (1980) para el caso de la educación. Este autor indica que las ciencias de la conducta tienen muchos problemas para identificar las relaciones entre las variables, al ser tantas y tan complejas, incluso cuando los métodos empleados están libre de errores. Cuando el empleo de las técnicas de investigación está plagado de errores evitables, la probabilidad de una conclusión errónea es bastante elevada.

Además, están comenzando a aparecer sistemas expertos que aconsejan sobre el tipo de análisis a realizar, y las hipótesis necesarias para su empleo, por lo cual, supuestamente podría obviarse tal empleo inadecuado mediante la utilización de estos nuevos recursos. Pero, como señala Hawkins (1990), el quitar al usuario la responsabilidad en el proceso de toma de decisiones esenciales impide el análisis y la interpretación sensibles e informados, dando la visión errónea de que el uso de la estadística es un proceso mecánico.

La dificultad del uso correcto de los conceptos y procedimientos estadísticos lleva en otros casos al rechazo precipitado del enfoque cuantitativo en la investigación. Esta visión constituye el otro extremo, compartido por un grupo de investigadores en el paradigma cualitativo, que prefieren prescindir de tales técnicas. Para ellos. el análisis de los datos ha de ser preferentemente interpretativo; la categorización, la codificación, la reducción de datos supone pérdida de una parte sustancial de la riqueza fenomenológica del mundo que se trata de explorar.

Sin embargo, esta postura supone en gran parte una ilusión de determinismo sobre el fenómeno observado; se argumenta que no se pretende la generalización, que el fenómeno observado es único. Pero todo proceso de toma de datos supone un muestreo; como indican Goetz y Lecompte (1988) incluso fijado el sujeto, se muestrean los tiempos, las circunstancias, las preguntas planteadas, las posibles reacciones, que provienen de poblaciones finitas y específicas.

Puede caerse también aquí en los que Kahneman y cols. (1982) denominan "creencia en la ley de los pequeños números", es decir, la creencia en que las características generales de un proceso estocástico han de reflejarse en el comportamiento del mismo, incluso con una muestra muy pequeña de ensayos. El "creyente en la ley de los pequeños números" sobreestima la potencia de sus métodos de investigación, estima a la baja la posibilidad de obtener resultados significativos por azar y tiene una confianza excesiva en la replicabilidad de sus primeros hallazgos.

Por otro lado, entre las técnicas aplicables al análisis cualitativo de datos, se van incorporando poco a poco algunas que clásicamente se han considerado como cuantitativas. Como ejemplo, Miles y Huberman (1984) en una exposición sistemática de tales técnicas señalan algunas de este tipo, como la aplicación de técnicas estadísticas a las frecuencias obtenidas en las diversas categorías, la clasificación o la factorización.

Afortunadamente se van abandonado estas posturas extremas y, cada vez con mas frecuencia, las investigaciones se encuentran en un punto intermedio entre los paradigmas cuantitativo y cualitativo. En el caso de la educación matemática, esta idea de complementariedad de los métodos cualitativo y cuantitativo es sugerida por Kilpatrick (1981) que indica que en lugar de abandonar los métodos cuantitativos en favor de los cualitativos, "deberíamos dirigir nuestros esfuerzos en la dirección de enriquecerlos". En particular, sugiere que los investigadores en educación matemática deberían estudiar nuevas técnicas de análisis exploratorio de datos y representación de resultados y considerar el uso de técnicas para el re-análisis de los datos y el meta-análisis de los estudios efectuados hasta la fecha.

LA COMUNICACIÓN ENTRE EL INVESTIGADOR Y EL ESTADÍSTICO

Con frecuencia, el empleo de la estadística con fines de investigación requiere el trabajo en colaboración de los investigadores con estadísticos profesionales. En estas ocasiones, el estadístico es un resolutor de problemas planteados por otra persona, y se exige de él más de lo que razonablemente está capacitado para proporcionar. En palabras de Barnett (1988): "debe ser un traductor y un comunicador: necesita comprender lo suficiente de las otras disciplinas para apreciar sus problemas. Ha de expresarlos en términos estadísticos y, lo más importante, comunicar las respuestas en forma comprensible",... Todo lo que se espera de él es que sea maestro de su propio oficio estadístico, y conocedor de muchos otros".

El proceso global comprende, en el caso más general, desde la planificación de la forma en que se han de recoger los datos, hasta la interpretación de los resultados obtenidos en el análisis de los mismos. En este proceso hay aspectos exclusivamente estadísticos, como serían los relativos al diseño del muestreo, o la elección del método concreto de análisis y su realización. Pero hay otros cualitativos y específicos del problema como son la elección de las unidades de análisis, variables, escalas de medida y proceso de categorización y codificación. Incluso algunos aspectos del análisis, como son la elección de las medidas de similaridad o distancias a emplear, que condicionan fuertemente los resultados, depende, grandemente, del problema planteado.

Es decir, entre la toma de datos y su tratamiento estadístico hay todo un proceso que no puede ser dejado a la responsabilidad exclusiva del estadístico, puesto que el significado de las categorías finales sólo se muestra a la luz de las preguntas que guían la investigación. Igualmente, como indica Dawis (1986), la interpretación de los resultados del análisis estadístico sólo tiene sentido profundo para la persona que ha planteado las preguntas.

Nuestra experiencia personal de colaboración como estadísticos en este tipo de trabajos con investigadores de diversas disciplinas nos ha hecho apreciar la enorme dificultad de comunicación entre el estadístico y el investigador en las fases iniciales y finales del proceso, que son, sin duda, las de mayor importancia. En este sentido se expresa también Speed (1988), quien indica que estas dificultades surgen por haber prestado una atención insuficiente al contexto no estadístico en que tiene lugar la discusión. Esta falta de acoplamiento del lenguaje estadístico y el lenguaje técnico, propio de la disciplina en la que se investiga, repercute en la calidad final del análisis efectuado que, en ocasiones, puede llegar a ser inadecuado por los motivos expuestos o bien puede ser interpretado incorrectamente en los informes finales de la investigación.

FORMACIÓN DE INVESTIGADORES EN EL EMPLEO DE TÉCNICAS ESTADÍSTICAS

En esta sección deseamos llamar la atención sobre las particularidades que presenta la investigación sobre la enseñanza de la estadística y el análisis de datos en el seno de un sistema didáctico particular: los cursos de formación de investigadores, en aquellas disciplinas en que la formación previa en el tema sea insuficiente. La necesidad de un conocimiento básico en esta materia y, sobre todo, del desarrollo de un nivel adecuado de razonamiento estadístico es puesta de manifiesto por Schuyten (1990), que señala como básicas las siguientes competencias estadísticas para el desarrollo de la investigación.

(1) Competencias requeridas para la interpretación adecuada de la literatura de investigación.

- Conocimiento y comprensión de los métodos empleados en la investigación dada, su dominio de aplicación y las hipótesis en que se basan.
- Capacidad para juzgar las decisiones del investigador respecto a los aspectos metodológicos y evaluación frente a otras posibles.
- Capacidad para evaluar las interpretaciones dadas por el autor a los resultados del análisis, frente a otras interpretaciones alternativas.
- Capacidad para juzgar los rasgos del estudio y sus posibilidades de generalización de los resultados.

(2) Competencias requeridas para el desarrollo de la investigación propia:

Debido a la existencia de los paquetes de programas estadísticos, la destreza en el cálculo ya no es el punto principal necesario para emplear estas técnicas. Pero estos paquetes serán de poca ayuda en la planificación del estudio, en la elección de la técnica apropiada y en la interpretación de los resultados.

Como vemos, estos dos tipos de competencias resultan básicos para la calidad de la investigación. Las del primer grupo resultan indispensables para realizar un estudio crítico de la bibliografía de investigación y juzgar la validez y posibilidad de generalización de cada estudio particular. Sin esta capacidad crítica podremos juzgar cada resultado como más o menos elegante, como más o menos de acuerdo con la tendencia general de las investigaciones en una misma problemática. Seremos, sin embargo, incapaces de juzgar la mayor o menor evidencia experimental de las teorías desarrolladas, que aceptaremos, no por la fuerza de su fundamentación, sino por el prestigio del autor, o por nuestra afinidad con sus ideas. De este modo, corremos el peligro de que nuestro campo científico emergente derive en lo que Bunge (1985) denomina una pseudoconciencia o una ideología.

Este peligro es aún mayor, si se considera que, respecto a las competencias del segundo grupo, pueden verse estos vacíos conceptuales en los trabajos publicados en los que, con cierta frecuencia, se aprecian análisis incorrectos o incompletos, como es señalado por White (1980). Se corre, además, el peligro de que estos errores sean transmitidos y aumentados por la difusión de esta literatura y la imitación de dicha metodología incorrecta por parte de investigadores que, debido a una preparación insuficiente en este tema, confían en la adecuación de unos métodos empleados por otros investigadores.

La comunidad de investigadores constituye, en consecuencia, un "sistema didáctico" de características particulares ya que se identifican dos componentes del mismo: el saber -pensamiento estocástico- y los discentes -usuarios de dicho saber. Pero la función "docente" queda diluida en la dialéctica de las publicaciones científicas y en los expertos que imparten cursos de especialización o colaboran en el desarrollo de la misma.

ETNOESTADÍSTICA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Las cuestiones que hemos planteado están siendo objeto de consideración en un campo de investigación que Gephart (1988) ha denominado etnoestadistica. "La preocupación fundamental de la etnoestadística es describir, analizar, explicar y comprender cómo se usa realmente la estadística en el proceso de investigación. La etnoestadística examina los aspectos cualitativos de la realización de análisis estadísticos, y utiliza este examen como fuente de comprensión de los procesos sociales que subyacen en el conocimiento científico" (Gephart, 1988: p.ll). El autor citado distingue tres órdenes o categorías de estudios etnoestadísticos:

1) Producción de datos estadísticos. En esta clase de estudios se investigan las actividades, significados y contextos implicados en la producción de la información estadística que ha de servir de base para el análisis. Estos etnógrafos se interesan por la observación empírica directa de la conducta y de las prácticas de los productores de datos estadísticos y de los entornos de investigación naturales en los que se producen y usan los mismos.

2) Adecuación del uso de los métodos e hipótesis. Se evalúa cómo el investigador, el sujeto, el instrumento de evaluación y el contexto social de medición afectan a los resultados de las investigaciones. Se trata pues de realizar análisis críticos de las propiedades técnicas del proceso

de recogida y análisis de datos. Esta es una preocupación característica de las investigaciones metodológicas, si bien el rasgo distintivo de los estudios etnoestadísticos es la inclusión de hipótesis sobre usos y prácticas sociales.

3) Retórica de la estadística. Los estudios etnoestadísticos del tercer tipo tratan del empleo de la estadística como una clase de retórica. Examina los informes estadísticos como si se trataran de una clase de recurso literario que usa esta información para persuadir al lector.

PERSPECTIVA DIDÁCTICA DE LA ETNOESTADÍSTICA

Los fenómenos que trata de poner de manifiesto la etnoestadística se refieren al uso de los conceptos y procedimientos estadísticos en la investigación, teniendo en cuenta el contexto social donde ésta tiene lugar. La hipótesis subyacente es que las restricciones personales e institucionales particulares donde estos saberes se usan les imponen significados específicos, con frecuencia inapropiados; en otras ocasiones por el desconocimiento de esta herramienta conceptual no se utiliza, suponiendo una pérdida de posibilidades en la obtención de conocimiento científico.

El investigador aplicado que recoge, analiza y comunica información estadística es un usuario de conceptos y procedimientos matemáticos con un conocimiento parcial y con frecuencia sesgado de los mismos. Este sujeto puede contemplarse como un "estudiante" (de hecho, incluso puede tener esta consideración académica) aunque esté inmerso en un "sistema didáctico" informal. La determinación de la relación personal al saber en cuestión en un momento y circunstancias dadas, así como de las condiciones de su evolución, constituyen un objeto de estudio para la investigación didáctica.

Esta clase de investigaciones constituirían una nueva categoría de estudios etnoestadísticos en la que se destacaría la dimensión didáctica de las relaciones institucionales y personales al saber (Chevallard, 1989), que en cierto modo tendría un carácter comprensivo de las otras tres categorías descritas por Gephart (1988). En este nivel el interés se centraría en la búsqueda de errores, dificultades y obstáculos en el uso de la estadística y la identificación de la naturaleza y condiciones de aparición de los mismos. Estos resultados pueden, a su vez, revertir en los escenarios tradicionales de enseñanza.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos destacado la importancia del análisis de datos como útil en la investigación y, como consecuencia, hemos deducido la necesidad de desarrollar un razonamiento estocástice adecuado y unos conocimientos mínimos del tema en los cursos de formación de investigadores. De este modo, el estudio de las condiciones requeridas para dicho desarrollo se convierte en un objeto de investigación para la didáctica de la matemática.

Asimismo, la realización de estudios etnoestadísticos desde una perspectiva didáctica debe ser estimulada como un medio para mejorar y vitalizar la investigación y, en especial, la relativa a la Educación Matemática. Dado el uso tan extendido del Análisis de datos en las ciencias sociales y naturales, el estudio de las cuestiones planteadas sería también una contribución significativa al diálogo entre las ciencias, con el carácter transdisciplinar auspiciado por Steiner (1985).

REFERENCIAS

BARNETT, V. (1988). Statistical consultancy. A basis lar teaching and research. En R. Davison y J. Swift (Eds,), *Proceedings of the Second International Conference en Teaching Sta tistics.* University of Victoria, pp. 303-307.

BENZECRI J.P. (1982). Histoire et prehistoire de l'analyse des données. Paris: Dunod.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le concept de rapport au savior. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de 1'Informatique.* Université Joseph Fourier. Grenoble.

DAWID. A. P. (1986). Contribution to the discussion of "Statistical modelling issues in school effectiveness studies" by M. Aitki and N. Longford. *Journal* of *the Royal Statistical Society,* Ser. A, 149,1-43.

DOUADY. R. (1986). Jeux de cadres el dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7(2), 5-31.

GEPHART, R.P. (1988). *Ethnostatistics :Qualitative foundations br quantitative research*. Sage University Paper series in Qualitative Research Methods (Vol.2). Beverly Hills, CA: Sage.

GOETZ, L. P. *y* LECOMPTE, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en la educación*. Madrid: MacGraw Hill.

HARRIS, R. R. *y* KANJI, G. K. (1988). The challenqes of statistical training. En: R. Davidson y J. Swift (Eds.). *Proceeding of the Second International Con ference en TeachingStatistics.* University of Victoria, pp. 498-501.

HAWKINS. A. (1990). Success and failure instatisticaleducation. An U.K. perspective. Presentado en el *ICOTS III*. University of Otago.

KAHNEMAN, D.. SLOVIC. P. *y* TVERSKY, A. (1982*). Judgement under uncertainty: Heuristics and biases.* Amsterdam: North-Holland.

KILPATRICK, J. (1981). Research in mathematical learning and thinking in the United States*. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2, pp. 363-379.

MILES, M. B. *y* HUBERMAN, A. M. (1984). *Quanlitative dala analysis*. Beverly Hills, CA: Sage.

SCHUYTEN. G. (1990). Statistical thinking in psychology and education. Presentado en el ICOTS III. University of Otago.

SPEED. T. (1988). Questions, answers and statistics. En R. Davidson y J. Swift (Eds.). *Proceedinqs of the Second International Con ference en Teaching Statistics.* University of Victoria, pp. 17-27.

WHITE. A. L. (1980). Avoiding errors in educational research. En: R S. Shumway (Ed.). *Research in Mathematics Education*. Reston, VA: N.C.T.M., pp.47-65.

11

USO DE MATERIAL TANGIBLE Y GRÁFICO-TEXTUAL EN EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS: SUPERANDO ALGUNAS POSICIONES INGENUAS[1]

Juan D. GODINO

Resumen

Una preocupación constante en la enseñanza de las matemáticas gira entorno al uso de material manipulativo que permita contextualizar las abstracciones matemáticas y facilitar el aprendizaje. Pero el uso de estos recursos, como también de los simbolismos gráficos y textuales, puede asimismo crear obstáculos para la comprensión de las matemáticas. En este trabajo, tras discutir el concepto de material manipulativo, se analiza esta problemática resaltando el papel de la actividad reflexiva del alumno enfrentado a situaciones problemáticas, como medio de superar dos potenciales 'enfermedades didácticas', el formalismo y el contextualismo.

1. INTRODUCCIÓN

En las distintas propuestas de reforma del currículo matemático en las comunidades autónomas españolas, y en otros países, se sugiere el uso de materiales didácticos (generalmente de tipo manipulativo o visual) como un factor importante para mejorar la calidad de la enseñanza. El empleo de modelos geométricos (geoplano, tangram, ...), ábacos, material multibase, dados, fichas, etc. se presenta como de "uso casi obligado" en los niveles primarios y secundarios. Estas propuestas vienen apoyadas por instituciones prestigiosas como el NCTM, que ha dedicado varias publicaciones a este tema. Se suele aducir que "los materiales manipulativos ayudan a los niños a comprender tanto el significado de las

---

1 En: A. M. Machado y cols. (Ed.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 117-124). Associaçao de Professores de Matemática: Guimaraes, Portugal, 1998.

ideas matemáticas como las aplicaciones de estas ideas a situaciones del mundo real" (Kennedy, 1986, p. 6).

A pesar de ser un tema de preocupación constante en las diversas propuestas de reforma de la enseñanza de las matemáticas y la abundancia de publicaciones sobre el tema, considero que es necesario profundizar sobre el sentido, fundamento y problemática que plantea a los profesores y a los investigadores en didáctica de las matemáticas el uso de materiales "manipulativos" en el estudio de las matemáticas.

En este trabajo voy a presentar algunas reflexiones sobre esta problemática, agrupadas en torno a los siguientes aspectos:

- la noción de material didáctico y sus tipos;
- funciones semióticas e instrumentales de los sistemas de signos;
- relaciones entre materiales manipulativos, problemas matemáticos y situaciones didácticas;
- la ingeniería didáctica como marco integrador de la investigación científica y la práctica de la enseñanza.

2. MATERIALES Y RECURSOS DIDÁCTICOS

Podemos considerar como material didáctico cualquier medio o recurso que se usa en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esta categoría se incluyen, por tanto, objetos muy diversos: desde manuales escolares -en su versión escrita, grabaciones en video, programas de ordenador, etc.- a los propios dedos de las manos, piedrecitas, calculadoras, etc. Con objeto de clarificar nuestras ideas vamos a proponer una clasificación propia de los recursos didácticos para añadir a las ya existentes:

- *ayudas al estudio*: recursos que asumen parte de la función del profesor (organización del contenido de enseñanza, presentación de problemas, ejercicios, conceptos, pruebas de autoevaluación, programas tutoriales de ordenador, etc.). Básicamente se incluyen aquí los manuales escolares, en sus diversas versiones (presentaciones magistrales o de cualquier tipo).
- *instrumentos (semióticos) para el razonamiento matemático*: Objetos físicos tomados del entorno o específicamente preparados, así como materiales gráficos, textos, palabras, los cuales pueden funcionar como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático.

Las reflexiones que siguen se refieren a esta segunda clase de recursos didácticos, esto es, a los instrumentos semióticos del trabajo matemático (sea éste profesional o escolar). Nos referiremos a ellos con el nombre genérico de *manipulativos (u objetos ostensivos)*, aunque debemos distinguir entre "*manipulativos tangibles*" –que ponen en juego la percepción táctil- y "*manipulativos gráfico-textuales-verbales*" –en los que participan la percepción visual y/o auditiva. Consideramos que también los gráficos, palabras, textos y símbolos artificiales matemáticos se manipulan, al igual que los programas de cálculo y graficación con dispositivos mecánicos o electrónicos. Tanto unos como otros desempeñan funciones semióticas, de representación de las técnicas y conceptos matemáticos, y por tanto, son recursos simbólicos (sistemas de signos matemáticos).

Parece importante reconocer que los materiales propiamente manipulativos (tangibles) desempeñan funciones simbólicas, y que los medios textuales y gráficos también son "manipulables". Veamos, por ejemplo, las manipulaciones simbólicas que se realizan al resolver una sencilla ecuación:

$$6x + 2 = 3x + 5;\ 6x - 3x = 5 - 2;\ 3x = 3;\ x = 3/3 = 1$$

Estas manipulaciones simbólicas pueden ser "concretadas" de manera tangible con un modelo de la balanza, o mediante un modelo gráfico de áreas, permitiendo atribuir un significado no meramente sintáctico a la ecuación y a las transformaciones realizadas (Filloy y Rojano, 1989).

El carácter dinámico y 'manipulable' de los sistemas de signos matemáticos está siendo potenciado recientemente por el uso de las nuevas tecnologías en las distintas ramas de las matemáticas (Geometría, Cabri; Análisis de Datos, Statgraphics; Cálculo, Derive; etc.)

3. FUNCIONES DEL MATERIAL MANIPULATIVO

El análisis de las funciones que pueden desempeñar los materiales manipulativos en la enseñanza de las matemáticas elementales se debe plantear dentro del marco más general del papel de los medios de expresión en la actividad matemática, y de manera más general dentro del estudio de las relaciones entre lenguaje y pensamiento (Vigotsky, 1934). No podemos olvidar que tanto las situaciones-problemas como las entidades abstractas -cualquiera que sea la naturaleza que se les atribuya- necesitan del lenguaje para ser comunicadas o incluso pensadas. Los recursos expresivos desempeñan un papel esencial en el triángulo epistemológico (signo, concepto, objeto), en sus distintas formulaciones, y en las funciones semióticas que se establecen entre dichos elementos (Godino y Recio, 1998).

Las regletas, bloques multibase, los propios dedos de las manos, el geoplano, los dados, etc., son recursos tangibles que permiten formular problemas, juntamente con el lenguaje ordinario y los símbolos artificiales matemáticos. Pero pensamos que no son meros medios de expresión, sino también instrumentos con los que hacer el trabajo matemático, sea escolar o profesional, esto es, se tratan de instrumentos semióticos. En el cálculo aritmético, por ejemplo, los manipulativos textuales permiten la expresión de las cantidades, la realización de operaciones, fijación de los procesos y resultados intermedios, lo que permite localizar y corregir posibles errores, obtener reglas y algoritmos estrechamente ligados a tales expresiones simbólicas. De este modo, el cálculo escrito es un potenciador del cálculo mental, que viene a ser manipulación interiorizada de los lenguajes tangibles, verbales y gráfico-textuales.

Los sistemas de signos matemáticos desempeñan un papel esencial en el trabajo matemático, de manera que el progreso en la puesta a punto de tales recursos está fuertemente relacionado con el avance de las matemáticas. Como afirma Bosch (1994), "El sujeto humano piensa y actúa manipulando objetos sensibles -los ostensivos - que le vienen dados por las instituciones o que él mismo crea deliberadamente. ... los materiales ostensivos son constitutivos de la construcción conceptual y la determinan en gran medida. (p. 466). En su análisis semiótico de las matemáticas, Rotman (1988) llegó a similares conclusiones: "Los números son objetos que resultan de una amalgama de dos actividades, pensar (imaginar acciones) y simbolizar (hacer marcas), las cuales son inseparables: los matemáticos piensan sobre marcas que ellos mismos han imaginado en una existencia potencial" (p. 32).

Pero no todos los instrumentos semióticos son igualmente eficaces para resolver problemas matemáticos. Pensemos, por ejemplo, en la eficacia del sistema de numeración decimal (numerales indo-arábigos) frente a una representación simple mediante piedrecitas o el sistema de numeración romano; o también, en la mayor eficacia del registro escrito algebraico frente al registro oral característico de la aritmética tradicional.

Una vez reconocidas los papeles instrumentales y semióticos de los recursos manipulativos en la actividad matemática tenemos que analizar su eficacia relativa, el espacio y circunstancias en las que cada manipulativo se revela como mejor adaptado a la función requerida. Así, por ejemplo, diversas investigaciones han mostrado que la aritmética oral es más eficaz que la escrita en ciertos contextos etnomatemáticos; que el ábaco japonés puede superar en eficacia a la calculadora; que, como dice el proverbio, "una imagen vale más que mil palabras". Pero tales ventajas se restringen a ámbitos reducidos y específicos frente a la generalidad de los "manipulativos textuales", como se refleja en el uso del lenguaje algebraico en la mayor parte de las matemáticas.

4. NATURALEZA DE LOS CONCEPTOS Y SU RELACIÓN CON LOS SISTEMAS DE SIGNOS

Los conceptos matemáticos, incluso los figurales, no están plasmados, reflejados o cristalizados en el material tangible. Una circunferencia, por ejemplo, no es el borde de una cara de una moneda, ni el trazo de una línea perfectamente redonda. Matemáticamente se define como "el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo", o el conjunto de pares de números reales que satisfacen la ecuación $x^2+y^2=r^2$. La expresión "concepto de circunferencia" es signo de un sistema de prácticas actuativas y discursivas asociada a cierta clase de situaciones problemáticas o descripciones del entorno. Los objetos matemáticos (técnicas y estructuras conceptuales) provienen de sistemas de prácticas ante tipos de tareas, no por abstracción empírica de cualidades de objetos ostensivos (Godino y Batanero, 1994; Godino y Batanero, 1998).

En consecuencia, pensamos que un uso irreflexivo del material manipulativo podría constituir obstáculos para la apropiación efectiva del conocimiento matemático. Las acciones matemáticas son virtuales, imaginadas, no reales. Son acciones sobre objetos mentales, "materializados" mediante sistemas de signos específicos.

El paso de la acción física directa sobre material tangible a la acción imaginada apoyada en sistemas de signos puede estar no exento de conflictos. Así, en la clase de matemática, y en los manuales escolares encontramos expresiones tales como:

"Dibuja una recta, un ángulo, etc."

Como entidades abstractas que son, parece obvio que no se puede dibujar una recta o un ángulo. Lo que se dibuja es un objeto ostensivo (manipulable) que evoca o simboliza el objeto abstracto correspondiente.

La recta, como entidad matemática, es ilimitada y carece de espesor, no así los dibujos y representaciones gráficas que se hacen de ella. Del mismo modo, un triángulo no es una pieza de material de una forma especial, ni una imagen dibujada sobre el papel. Es una forma controlada por su definición. Los objetos que investiga y manipula el razonamiento geométrico son entidades mentales que Fischbein (1993) denomina *conceptos figurales*, los cuales "reflejan propiedades espaciales (forma, posición y magnitud), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales, como idealidad, abstracción, generalidad y perfección" (p. 143).

Las metáforas de "manipular y ver los objetos matemáticos", como afirma Pimm (1995), son esenciales para la comprensión matemática. Pero como toda metáfora resalta unos aspectos y ocultan otros: manipulamos y vemos los sistemas de signos matemáticos, pero los conceptos matemáticos son intangiles e invisibles. Debemos prestar atención al uso pertinente de las metáforas en el estudio de las matemáticas.

El lenguaje y la práctica escolar impregnan a los objetos matemáticos de unas connotaciones tangibles y visuales de las que progresivamente los alumnos deben desprenderse en los niveles superiores de enseñanza. Al mismo tiempo, las manipulaciones puramente sintácticas y formalistas de los sistemas de signos verbales- textuales pueden ocasionar un aprendizaje memorístico, rutinario, desprovisto de sentido para los alumnos.

5. SISTEMAS DE SIGNOS Y SITUACIONES-PROBLEMAS

El estudio de las matemáticas requiere enfrentar al alumno a problemas o tareas cuya solución son los conocimientos matemáticos pretendidos. Esta confrontación con situaciones-problemas, inductora de la actividad de matematización, contribuirá, además, a su formación integral como persona, objetivo final del proceso educativo.

El uso del material debe permitir el planteamiento de problemas significativos para los estudiantes, que puedan ser asumidos por ellos, apropiados a su nivel e intereses, y pongan en juego los conceptos, procedimientos y actitudes buscadas. El material en sí es inerte, tanto si es tangible como gráfico-textual, y puede ser usado de múltiples maneras indeseables. Por ejemplo, los dados pueden quedar almacenados en el armario de la clase, ser lanzados contra cabeza de los compañeros, contar los puntos marcados en cada cara, etc., actividades nada pertinentes para el estudio de los fenómenos aleatorios. Los aparatos físicos, ni los restantes manipulativos, ofrecen experiencia matemática inmediata en sí mismos. La actividad matemática se pone en juego por las personas enfrentadas a tareas que les resultan problemáticas.

Ahora bien, no es suficiente que el material permita proponer problemas ingeniosos resolubles mediante ideas brillantes al alcance de mentes priviligiadas. Hay que superar la ilusión de transparencia de que el aprendizaje matemático se produce enfrentando al sujeto a problemas aislados, atípicos e ingeniosos. El estudio matemático se hace buscando las similitudes entre los problemas, reduciéndolos a otros más simples para los que tenemos técnicas de solución, y extendiendo las soluciones a otras situaciones y contextos.

El aprendizaje matemático no es consecuencia directa y exclusiva de la confrontación de los alumnos con tareas más o menos problemáticas. Los problemas matemáticos propuestos en clase formarán parte de dispositivos más generales y complejos que son las *situaciones didácticas* (Brousseau, 1986) Estas situaciones deben contemplar no sólo los momentos de la acción/ investigación personal de los alumnos con las tareas - fase para la cual el material tangible puede desempeñar un papel crucial- sino que deben diseñarse e implementarse, además, momentos de formulación /comunicación de las soluciones, justificación /discusión de las mismas, institucionalización de los conocimientos pretendidos (compaginar las técnicas, el lenguaje y los conceptos puestos en juego con la cultura matemática correspondiente).

Lo que se debe considerar como recurso didáctico no es el material concreto o visual, sino la situación didáctica integral que atiende tanto a la praxis como al logos (discurso), o mejor al sistema de prácticas actuativas y discursivas de las que emergen las técnicas y estructuras conceptuales matemáticas.

Ejemplos de esta clase de unidades didácticas en las que se integra el uso de materiales y las situaciones-problema para el estudio de los fenómenos aleatorios por alumnos de primaria y secundaria puede encontrarlas el lector en el texto de Godino y cols. (1987). Un libro escrito con una orientación similar, para el campo del razonamiento combinatorio en secundaria, es el de Batanero y cols. (1994).

6. PAPEL DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

El uso de unos medios de acción específicos para el estudio de las matemáticas (secuencias de situaciones didácticas) por parte de los profesores debe estar basado en descripciones sistemáticas y explicaciones de sus efectos sobre los sistemas para los que son diseñados. ¿Qué aprenden los alumnos tras un proceso de estudio basado en el uso de un material determinado? ¿De qué factores depende el estudio? ¿Podemos aspirar en los niveles de educación obligatoria a que los alumnos adquieran determinadas destrezas en el manejo de sistemas de signos textuales? ¿Cuándo y de qué modo dejar de usar material tangible y pasar al textual?

Hay que reconocer que no tenemos respuestas claras a estas cuestiones. Definen una problemática científico-tecnológica compleja que requiere invertir gran cantidad de tiempo y recursos humanos. Es necesario tomar conciencia de que el uso del material, de cualquier tipo, no comprometa toda la atención de los alumnos, desplazando la propia reflexión matemática. "Usar manipulativos tangibles en la enseñanza de las matemáticas es siempre un medio para un fin, nunca un fin en sí mismo" (Pimm, 1995, p. 13).

Con frecuencia se defiende el uso de distintos sistema de representación para el aprendizaje significativo de las matemáticas, incluyendo las representaciones con material tangible. Pero como afirma Baroody (1989), "desafortunadamente, no hay aún evidencia suficiente disponible para determinar qué modos de presentación son cruciales y qué secuencia de representaciones deberían usarse antes de introducir las representaciones simbólicas" (p. 5). Pensemos, por ejemplo, en la enseñanza a personas invidentes, las cuales pueden aprender cualquier contenido matemático sin el recurso a la percepción visual.

El juego de representaciones es condición necesaria pero no suficiente para el aprendizaje matemático. La eficacia relativa de cada sistema de signos desde el punto de vista instrumental nos debe llevar a descartar algunos de estos sistemas y concentrar los esfuerzos en el dominio de herramientas con perspectivas de futuro. El ábaco japonés, por ejemplo, es un instrumento de cálculo de extraordinaria eficacia para realizar cálculos aritméticos; compite incluso, una vez adquirida cierta destreza, con el uso de la calculadora. Pero se duda de su valor como recurso didáctico en los primeros niveles de enseñanza debido a sus convenciones particulares de representación de los números y la complejidad de su manipulación.

Incluso el uso del ábaco ordinario, aunque es una herramienta excelente y útil, está lejos de ser el remedio para las dificultades de la enseñanza y aprendizaje de la aritmética. "Es más que dudoso, por ejemplo, que el ábaco sea el mejor modelo -o siquiera bueno- para el aprendizaje de la multiplicación o la división" (Hernán y Carrillo, 1988, p. 60).

7. ALGUNAS CONCLUSIONES

Los análisis semióticos que se están realizando de la actividad matemática por distintos autores (Rotman, 1988; Bosch, 1994; Chevallard, 1995; Pimm, 1995; Nunes, 1997) revelan como esencial el uso de distintos medios expresivos para el desempeño de tal actividad, la cual, aunque es esencialmente mental, se apoya en la acción sobre tales instrumentos semióticos. Estos análisis apoyarían, por tanto, el uso de materiales manipulativos tangibles en los primeros niveles de enseñanza siempre que tales recursos sirvieran de apoyo ostensivo para la reflexión matemática.

En las secciones anteriores hemos enfatizado una cierta precaución respecto del uso ingenuo de los manipulativos tangibles. Pero esa actitud es igualmente aplicable respecto del uso de los manipulativos gráfico-textuales. En general el empleo de los instrumentos semióticos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas puede estar afectado, entre otras, de dos *"enfermedades didácticas":*

- *el formalismo*, consistente en un uso abusivo y prematuro de ostensivos verbales - textuales, y consiguiente pérdida del significado extensional (conexión con las situaciones- problemas) de la actividad matemática;
- *el contextualismo*, esto es, el uso abusivo y retardado de ostensivos tangibles, y la consiguiente pérdida del sentido intensional (conexión con las generalizaciones matemáticas) de dicha actividad.

La superación de ambas "enfermedades" requiere implementar una dialéctica compleja entre los distintos tipos de ostensivos que promueva la actividad reflexiva del alumno. Esto precisa un gran esfuerzo de investigación para dilucidar qué materiales usar, cuándo, cómo, con quién, así como sobre las conexiones que se deberían establecer entre los manipulativos tangibles, orales y gráfico- textuales, entre las técnicas y estructuras conceptuales matemáticas y las situaciones-problemas que resuelven y organizan tales estructuras. Con relación a esta problemática, que en cierto modo define el campo de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, nos parece que la Teoría de Situaciones

Didácticas de Brousseau (1997) y la Teoría de la Educación Matemática Realista desarrollada en el Instituto Freudenthal (Gravemeijer, 1997) son aportaciones relevantes. No obstante, consideramos que la contribución de los profesores para indagar sobre las cuestiones mencionadas es un requisito imprescindible para la mejora efectiva de la educación matemática.

Reconocimiento

Agradezco al Dr. Pablo Flores Martínez las críticas y sugerencias realizadas a una primera versión de este trabajo.

7. REFERENCIAS

Baroody, A. J. (1989). Manipulatives don't come with garantees. *Arithmetic Teacher* (October): 4-5.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). Razonamiento combinatorio.Madrid: Síntesis.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividd matemática*. Tesis doctoral. Departament de Matemàtiques. Facultad de Ciènces. Universitat Autònoma de Barcelona.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer, A. C.

Chevallard, Y. (1995). Les outils sémiotiques du travail mathématiques. *Petit x*, nº 42: 33-57.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics* 9, 2: 19-25.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24: 139-162.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 14, nº 3: 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998).Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area for research in mathematics education. En: A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Recio, A. M. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educación matemática. *Actas de la 22 Conferencia Anual del International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Sudáfrica.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. En: T. Nunes y P. Bryant (Eds.),*Learning and teaching mathematics: An international perspective* (p. 315-345). Hove, East Sussex (U.K.): Psychology Press.

Hernan, F. y Carrillo, E. (1988). *Recursos en el aula de matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Kennedy, L. M. (1986). Manipulatives. A rationale. *Arithmetic Teacher*, 33: 6-7

Nunes, T. (1997. Systems of signs and mathematical reasoning. En: T. Nunes y P. Bryant (Eds.),*Learning and teaching mathematics: An international perspective* (p. 29-52). Hove, East Sussex (U.K.): Psychology Press.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. London: Routledge.

Rotman, B. (1988). Towards a semiotics of mathematics. *Semiotica* 72 (1/2): 1-35.

Vygotsky, L.S. (1934). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires, La Pléyade, 1977.

12

LA CONSOLIDACIÓN DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA COMO DISCIPLINA CIENTÍFICA[1]

Juan D. GODINO

El hilo argumental de este trabajo será aportar algunos indicadores empíricos y argumentaciones a favor de tres tesis:

1) La didáctica de la matemática ha logrado en la actualidad una posición consolidada desde el punto de vista institucional, incluso en España.
2) Existe una gran confusión en las agendas de investigación y en los marcos teóricos y metodológicos disponibles, situación propia de una disciplina emergente.
3) Existe un divorcio muy fuerte entre la investigación científica que se está desarrollando en el ámbito académico y su aplicación práctica a la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

Pero antes de proceder a este análisis nos parece necesario aclarar los aspectos o dimensiones que componen la educación matemática.

ASPECTOS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Consideramos que la educación matemática es un sistema social, heterogéneo y complejo en el que es necesario distinguir al menos tres componentes o campos:

a) La acción práctica y reflexiva sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
b) La tecnología didáctica, que se propone desarrollar materiales y recursos, usando los conocimientos científicos disponibles.
c) La investigación científica, que trata de comprender el funcionamiento de la enseñanza de las matemáticas en su conjunto, así como el de los

---

1 En, A. Martinón (2000). *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos* (pp. 347-350). Madrid: Nívola.

sistemas didácticos específicos (profesor, estudiantes y conocimiento matemático).

Estos tres campos se interesan por un mismo objeto -el funcionamiento de los sistemas didácticos-, e incluso tienen una finalidad última común: la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Pero la perspectiva temporal, los objetivos, los recursos disponibles, sus reglas de funcionamiento y las restricciones a que están sometidos, son intrínsecamente distintas. El mundo de la acción práctica es el campo propio del profesor, el cual tiene a su cargo uno o varios grupos de estudiantes a los cuales trata de enseñar matemáticas. El primer objetivo de un profesor es mejorar el aprendizaje de sus alumnos, de modo que estará principalmente interesado en la información que pueda producir un efecto inmediato sobre su enseñanza. El segundo componente, que hemos denominado tecnológico (o investigación aplicada) es prescriptivo, ya que está más comprometido con la elaboración de dispositivos para la acción y es el campo propio de los diseñadores de currículos, los escritores de manuales escolares, materiales didácticos, etc. Finalmente la investigación científica (básica, analítica y descriptiva) está particularmente comprometida con la elaboración de teorías y se realiza usualmente en instituciones universitarias.

Pasamos, a continuación, a desarrollar las tres tesis anunciadas.

CONSOLIDACIÓN INSTITUCIONAL

El reconocimiento por el Consejo de Universidades de la Didáctica de la Matemática como "área de conocimiento" en 1984, al mismo nivel que las restantes disciplinas universitarias, y el desarrollo de la Ley de Reforma Universitaria (LRU) de 1984 ha hecho posible en España la creación de departamentos universitarios sobre la base de dicha área, o en unión de otras áreas de didácticas especiales. Estos departamentos han constituido un sólido soporte para el desarrollo de la didáctica de las matemáticas dado que la LRU confía a los departamentos las responsabilidades docentes e investigadores en las áreas de conocimiento correspondientes. En los departamentos se concentran los principales recursos para la investigación, tanto personales (más de 200 profesores permanentes adscritos al área, con una dedicación reconocida a la investigación), como materiales (fondos bibliográficos específicos).

Otro indicador de consolidación institucional consiste en los programas de doctorado específicos ofertados en distintas universidades y de tesis doctorales defendidas sobre problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (más de 50 en el período 1994- 2000), como también los proyectos de investigación financiados con fondos públicos que se están desarrollando en competición con las restantes áreas de conocimiento. La comunidad de investigadores en didáctica de la matemática ha comenzado a tomar conciencia de su propia especificidad e intereses como se pone de manifiesto en la constitución en 1997 de una sociedad profesional propia, la Sociedad de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) cuyos objetivos y actividades pueden consultarse en la página web, http://www.ugr.es/local/seiem/ .

Otros síntomas de consolidación de la didáctica de las matemáticas a nivel internacional se derivan de la existencia de instituciones similares a las españolas, o incluso institutos de investigación específicos (CINVESTAV, México), IDM, Alemania, etc.), y sobre todo de la publicación de revistas periódicas de investigación (Journal for Research in Mathematics Education, Educational Studies in Mathematics, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Recherches en Didactique des Mathematiques, etc.), la publicación de "handbooks", como el de Grouws (1992) y Bishop et al. (1996), congresos internacionales como PME (Psychology of Mathematics Education, CERME (Conference of the European Society for Research in Mathematics Education), etc.

Como describe Guzmán (1996), el ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) ha propulsado con eficacia los estudios relativos a los problemas de la educación matemática a lo largo del siglo XX y ha contribuido muy poderosamente a la constitución de la nueva disciplina científica que se ocupa de los problemas relacionados con educación matemática. El *ICMI Study* celebrado en Washington en 1994, cuyos trabajos han editado Sierpinska y Kilpatrick (1998) sobre la naturaleza de la investigación en la educación matemática viene a señalar su madurez como disciplina científica, con objetivos y métodos propios.

Para una perspectiva histórica de la didáctica de la matemática, su nacimiento y consolidación progresiva remitimos al lector al trabajo sistemático de Rico, Sierra y Castro (2000).

CONFUSIÓN DE PARADIGMAS Y AGENDAS

En cuanto a los programas y métodos de investigación podemos decir que se ha pasado del predominio de un enfoque psicoestadístico en la década de los 70 y parte de los 80, obsesionados por los tests y su fialibilidad, a la proliferación de métodos, la apertura de las agendas de investigación y a la adopción de posiciones eclécticas. Sin que el enfoque psicológico haya perdido importancia (como se puede ver en la vitalidad del grupo internacional PME) se están desarrollando también investigaciones dentro de enfoques diversos como el interpretativo, etnográfico, antropológico, socio-crítico, etc.

Hay autores que defienden el uso de una variedad de enfoques y métodos en la investigación en didáctica de la matemática considerando esta situación como beneficiosa, dada la parcialidad de los mismos. Pero considero que esto origina una fuerte confusión entre las diversas comunidades de investigadores, haciendo a menudo improductivos los esfuerzos. La variedad de enfoques, teorías, métodos está reclamando la realización de investigaciones, mas bien propias de la filosofía de la ciencia, que ponga un cierto orden y estructura en el panorama del componente científico de la educación matemática. Considero que, aunque la didáctica de la matemática pueda considerarse una disciplina madura en el sentido sociológico, no ocurre igual necesariamente en el sentido filosófico o metodológico.

Para un análisis más extenso de los aspectos teóricos y metodológicos de la didáctica de la matemática remitimos al lector a los trabajos de Godino (1991).

DIVORCIO TEORÍA-PRÁCTICA

En cuanto al aspecto de la educación matemática que hemos descrito como *práctica reflexiva* debemos reconocer la pujanza de las asociaciones de profesores de matemáticas, tanto a nivel regional, nacional como internacional. Un indicador de esto es la existencia de la Federación Española de Asociaciones de Profesores de Matemáticas (con 12 sociedades regionales asociadas), sus respectivas revistas (Suma, Números, Épsilon, etc.) y congresos orientados a los profesores, y a nivel internacional la poderosa NCTM (USA) y el ICME.

Pero debemos reconocer las escasas y con frecuencia nulas conexiones de estas actividades con el componente científico-académico. Indicadores de esta separación son la existencia de sociedades profesionales independientes (al menos en España, Francia y Portugal), y de revistas de "profesores" y de "investigadores".

Otro síntoma de desconexión, al menos en España, está en el desarrollo de los currículos de matemáticas, que hasta ahora han sido elaborados por comisiones en cuya composición se ignora la existencia de los departamentos universitarios especializados. Pero donde es más crítica la separación es en la formación inicial de profesores de secundaria y en la formación permanente, las cuales se hacen con una escasa o nula participación de los especialistas en didáctica de las matemáticas.

Podemos concluir que la educación matemática como disciplina académica se ha ido consolidando progresivamente, en la escena internacional, en los últimos 30 años. Pero su desarrollo ha sido desigual en las distintas facetas que la componen, y de manera particular en la articulación entre las mismas.

REFERENCIAS

Bishop, A., Clements, K., Keitel, C. Kilpatrick, J. y Laborde, C. (1996). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer A. P.

Godino, J. D. (1991). Teoría y métodos de investigación en educación matemática. [Artículos recuperables en http://www.ugr.es/local/jgodino].

Grows, D. (1992). *Handbook of reseach of mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Guzmán, M. de (1996).Madurez de la investigación en educación matemática. El papel del ICMI. En, L. Puig y J. Calderón, (Eds), *Investigación y Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: CIDE.

Rico, L. Sierra, M. y Castro, E. (2000). Didáctica de la matemática. En, L. Rico y D. Madrid (Eds), *Las Disciplinas Didácticas entre las Ciencias de la Educación y las Áreas Curriculares*. Madrid: Síntesis.

Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (1998). *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht, HL: Kluwer A. P.

13

EL INTERACCIONISMO SIMBÓLICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA [1]

Juan D. GODINO, Universidad de Granada

Salvador LLINARES, Universidad de Sevilla

Resumen

Presentamos una síntesis de las principales características del enfoque de investigación conocido como Interaccionismo Simbólico (I.S.) a través de su posicionamiento en relación a: la noción de significado, al papel del lenguaje en el aprendizaje, la manera de entender el aprendizaje y el papel desempeñado por la negociación de los significados matemáticos (ambigüedad e interpretación). Se describen los constructos teóricos utilizados por el programa interaccionista para describir y comprender los fenómenos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemática: dominios de experiencia subjetiva, patrones de interacción y normas sociomatemáticas. Se identifican ciertas similitudes entre algunas de los constructos teóricos en el IS y en la Teoría de las situaciones didácticas y finalmente se sitúa el programa interaccionista entre el individualismo y el colectivismo en el intento por explicar el aprendizaje matemático.

1.CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA APROXIMACIÓN INTERACCIONISTA

Una parte sustancial de la investigación en educación matemática se ocupa de estudiar las relaciones entre el profesor, los estudiantes y la tarea matemática en las clases de matemáticas, tratando de encontrar respuestas fundadas a cuestiones del tipo, ¿cómo el profesor y los estudiantes llegan a compartir significados matemáticos para que el flujo de la clase continúe de forma viable?, ¿cómo comprende un estudiante las intervenciones del profesor?

[1] En Educación Matemática, 12(1): 70-92

Para intentar responder a estas cuestiones es necesario desarrollar perspectivas teóricas que sean útiles para interpretar y analizar la complejidad de las clases de matemáticas. En este sentido, Bauersfeld (1994) indica que es posible utilizar constructos teóricos procedentes de la sociología y la lingüística (etnometodología, interaccionismo social, y análisis del discurso), pero que, ya que estas disciplinas no están directamente interesadas en las cuestiones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de contenidos curriculares, es necesario realizar una cierta traducción para responder a las cuestiones específicas de la educación matemática. Esta aproximación se apoya en el supuesto de que se generan diferentes prácticas en el aula si se toma las matemáticas como un conjunto de verdades objetivas, como algo existente y documentado objetivamente, o si se ve la práctica en el aula como un proceso de matematización compartida, guiada por reglas y convenios que emergen de la misma práctica. Esta segunda perspectiva subraya la importancia de la "constitución interactiva" del significado en las aulas y convierte en objeto de investigación las relaciones entre las características sociales de los procesos de interacción, así como las existentes entre el pensamiento del profesor y el de los estudiantes (Bauersfeld, Krummheuer & Voigt, 1988). Una perspectiva teórica que tiene implicaciones analíticas y que ha sido utilizada para estudiar estas relaciones es el interaccionismo simbólico (I.S.), cuyo supuesto básico es que las dimensiones culturales y sociales no son condiciones periféricas del aprendizaje matemático sino parte intrínseca del mismo.

Según la síntesis que realizan Sierpinska y Lerman (1996) del programa interaccionista aplicado a la educación matemática el interaccionismo es una de las aproximaciones a la investigación sobre el desarrollo intelectual que promueve una visión sociocultural sobre las fuentes y el crecimiento del conocimiento. Se enfatiza como foco de estudio *las interacciones entre individuos dentro de una cultura* en lugar de sobre *el individuo.* El énfasis se coloca en la construcción subjetiva del conocimiento a través de la interacción, asumiendo el supuesto básico de que los procesos culturales y sociales son parte integrante de la actividad matemática (Bauersfeld, 1995-b). Los fundamentos de la perspectiva interaccionista se pueden esquematizar en:

- el profesor y los estudiantes constituyen interactivamente la cultura del aula,
- las convenciones y convenios tanto en lo relativo al contenido de la disciplina, como en las regularidades sociales, emergen interactivamente, y
- el proceso de comunicación se apoya en la negociación y los significados compartidos.

Bauersfeld (1994) indica que, para comprender los logros individuales de los alumnos y las regularidades sociales que se generan en determinadas culturas de aula, es necesario considerar puntos de vista psicológicos y sociológicos sin dar preferencia a ninguno de ellos. En cierto sentido se identifica una reciprocidad entre,

- el cambio individual y el desarrollo a través de la participación en la interacción social, incluyendo la inevitable subjetividad de las construcciones personales; y
- la realización permanente de la cultura del aula y el cambio de las regularidades sociales a través de los miembros individuales (Bauersfeld, 1994; p. 138).

De esta manera, Bauersfeld (1994; p. 139) sitúa la perspectiva interaccionista en una posición intermedia entre dos polos, definidos de manera esquemática por,

- *la perspectiva individualista* (psicología cognitiva, con referencia a Piaget): el aprendizaje matemático se ve estructurado por los intentos del individuo de resolver lo que encuentra problemático en su mundo experiencial; el sujeto es el actor y el conocimiento matemático es construido por él;
- *la perspectiva colectivista* (teoría de la actividad, con referencia a Vygotsky): el aprendizaje consiste en la enculturación en estructuras sociales preexistentes, apoyado por medios-instrumentos mediadores o representaciones adecuadas; el sujeto es el objeto de prácticas culturales, y el conocimiento matemático dado es interiorizado.

Al estudiar el aprendizaje de los estudiantes, las perspectivas interaccionistas enfatizan tanto los procesos individuales de dotar de sentido como los procesos sociales, ya que se concibe el desarrollo de la comprensión personal de los individuos a través de su participación en la negociación de las normas del aula, incluyendo las generales y las que son específicas de la actividad matemática. Voigt (1996; p. 30) indica que una aproximación interaccionista enfatiza los procesos individuales de dotación de significado, señalando,

> *"(el interaccionismo) no deriva el aprendizaje individual de la interacción social como se sugiere en las teorías de la socialización y de la internalización. Desde el punto de vista interaccionista, la interacción social no funciona como un vehículo que transforma el conocimiento "objetivo" en conocimiento subjetivo, sino que de hecho, la interacción social hace posible que las ideas subjetivas lleguen a ser compatibles con la cultura y con el conocimiento intersubjetivo como las matemáticas"*

Para caracterizar el interaccionismo simbólico en educación matemática vamos a describir en esta sección su posicionamiento en relación a:

- el significado, la naturaleza del conocimiento matemático y los procesos de llegar a conocer (comprensión matemática),
- el papel del lenguaje, y
- el aprendizaje,

para finalizar describiendo los objetivos de la investigación del programa interaccionista.

1.1. Significado, conocimiento matemático y formas de conocer

Una idea clave en el interaccionismo simbólico es que el significado se desarrolla en (y a partir de) la interacción e interpretación entre los miembros de una cultura. En particular, el interaccionismo se basa en el análisis de tres premisas:

1) el ser humano orienta sus actos hacia las "cosas" en función de lo que éstas significan para él;
2) el significado de esas cosas se deriva de, o surge como consecuencia de la interacción social que cada cual mantiene con su prójimo (fuente del significado), y
3) los significados se manipulan y modifican mediante un proceso interpretativo desarrollado por la persona al enfrentarse con las cosas que va hallando a su paso (Blumer, 1982; p.2)

Un aspecto central de la perspectiva interaccionista es que el significado se desarrolla a través de la *interacción* y la *interpretación* ya que se enfatiza el proceso interpretativo implicado en la emergencia del significado cuando una persona responde, más que simplemente reacciona a las acciones de otro. Así, Blumer (1982) señala en relación a estos dos aspectos[2] lo siguiente

> *"el significado que las cosas encierran para el ser humano constituye un elemento central en sí mismo ... (y) es fruto del proceso de interacción entre individuos ... (el significado) es un producto social ... [Además] la utilización del significado por una persona en el acto que realiza implica un proceso interpretativo ... con dos etapas claramente diferenciadas ... (en primer lugar) el agente se indica a sí mismo cuáles son las cosas hacia las que se encaminan sus actos ... (en segundo lugar) la interpretación se convierte en una manipulación de significados ... la interpretación es vista como un proceso formativo en el que los*

[2] Blumer (1982) identifica otras nociones básicas en su caracterización del interaccionismo simbólico y que definen un esquema analítico específico: naturaleza de la vida en las sociedades y grupos humanos, naturaleza de la interacción social, naturaleza de los objetos, el ser humano considerado como organismo agente, naturaleza de la acción humana, interconexión de la acción.

significados son utilizados y revisados como instrumentos para la orientación y formación del acto"(p.3-4).

Por otra parte, el interaccionismo defiende que es preciso enjuiciar la acción en función del agente ya que éste es el que construye su acción. *La acción* incluye una consideración general de las diversas cosas que percibe y la elaboración de una línea de conducta basada en el modo de interpretar los datos percibidos (Blumer, 1982; p.12). En particular, para que un proceso de comunicación sea satisfactorio es necesario que las representaciones de los individuos sean compatibles, de ahí que las interpretaciones en el proceso de interacción deben tener en cuenta las intenciones de los demás. Además, se toman como constructos individuales las representaciones (internas), que emergen a través de la interacción social, como equilibrio viable entre los verdaderos intereses de una persona y las condiciones realizadas, más que como una aplicación interna uno-a-uno de realidades dadas previamente o como una reconstrucción encajada del mundo. Como consecuencia, el análisis de la actividad y el discurso de los estudiantes se centra en las intenciones de los participantes (Yackel, 1995). Por consiguiente, en las perspectivas interaccionistas, el significado está en *el uso* de las palabras, frases, o signos y símbolos más que en los sonidos, signos o representaciones. De ahí la importancia dada al lenguaje (una ampliación de esta reflexiones se realizará en la sección 1.2).

Conocer o recordar alguna cosa se concibe como la activación momentánea de opciones a partir de acciones experimentadas (en su totalidad), más que como un "objeto", llamado conocimiento, recuperable, almacenable y repartible desde el "desván" de la memoria. La noción conceptual utilizada en la perspectiva interaccionista para dar cuenta de este supuesto teórico es el "dominio de experiencia subjetiva" que será analizado en la sección 2.

La perspectiva interaccionista postula el carácter discursivo del conocimiento. En particular, las matemáticas son vistas como un tipo particular de discurso. 'El discurso', sin embargo, no es sólo 'lenguaje'; es lenguaje-en-acción, o lenguaje como un medio para lograr fines cognitivos, sociales u otros. Como discurso, las matemáticas establecen un cierto universo: las matemáticas son un modo de ver el mundo, y de pensar sobre él. Como este universo se establece por medio de la comunicación y la construcción de convenciones y comprensiones compartidas de los contextos, el tipo de conocimiento matemático que los estudiantes desarrollan depende de las características de las situaciones de comunicación en que se desarrollan. En algunas presentaciones de las posiciones interaccionistas se enfatiza el carácter convencional del conocimiento. 'Convencional', sin embargo, no quiere decir 'arbitrario', ni 'formal'. La calificación se refiere a las connotaciones de 'convención' tales como 'acuerdo' o 'consenso' sobre un conjunto de asuntos. Se refiere a la hipótesis de que los significados se logran por medio de negociación (Bauersfeld, 1995-a, p. 277).

La matematización describe una práctica basada en convenciones sociales más que en la aplicación de un conjunto de verdades eternas aplicables universalmente. Para Bauersfeld (1995-b; 143) hay una diferencia importante entre el concepto de *conocimiento como objeto* y la interpretación alternativa de *conocer como desarrollo*. Para Bauersfeld esta diferencia implica,

- el uso de un producto de un proceso, frente a,
- la fijación flexible del significado en el flujo real de la interacción social.

De ahí que Bauersfeld y sus colegas evitan la noción de conocimiento (knowledge) y prefieren hablar de conocer o formas de conocer (knowing, ways of knowing) (Bauersfeld,1995-a; p. 280). Esta perspectiva que subraya la íntima relación entre el individuo y lo social lleva al concepto de cultura (interpretada como la descripción por un observador de la estructura procesual de un sistema social) e introduce la idea de aprendizaje a través de la participación (esta idea será retomada en la sección 1.3 sobre el aprendizaje).

1.2. El lenguaje

El lenguaje es visto como un 'moldeador activo de la experiencia', no como 'un espejo pasivo de la realidad'. La orientación interaccionista hacia el lenguaje se distingue tanto del constructivismo como de la perspectiva Vygotskiana, aunque comparte con ellos el rechazo de una visión representacionista del lenguaje ('el lenguaje como una representación del mundo'). El interaccionismo deja de ver el lenguaje como un objeto separado -una herramienta - que puede ser usada para distintos propósito y que, en principio, podría ser reemplazado por otro medio de comunicación. Para el interaccionismo el habla (languaging) describe una práctica social, sirviendo en la comunicación para señalar experiencias compartidas y para la orientación en la misma cultura, más que un instrumento para el transporte directo del sentido o como un 'transportista' de los significados asociados. Mientras que Vygotsky vio en el lenguaje un medio de transmisión cultural.

Esta suposición sobre el lenguaje del I.S. lleva a la necesidad de la negociación continua de los significados en el aula dirigida a,

- conseguir una adaptación viable a los significados institucionales del contenido, y

- clarificar los significados compartidos de los signos y palabras en uso, aumentando la reflexión sobre los procesos constructivos subjetivos subyacentes (Bauersfeld, 1994; p. 141).

Esta última reflexión nos conduce a la cuestión del papel que desempeña el lenguaje en el aprendizaje y, en particular en el campo de la educación matemática, de cómo los estudiantes llegan a aprender lo que es un argumento convincente/válido en matemáticas mediante la negociación de los significados. Esto conduce a lo que se han denominado *normas sociomatemáticas* que son, desde la perspectiva social, el correlato de las creencias y valores matemáticos en la perspectiva psicológica, aspecto que será analizado en la sección 5.

En el constructivismo, el lenguaje es una expresión del pensamiento. El constructivismo critica la 'idea del conocimiento como representación de una realidad 'externa' que se supone es independiente del conocedor', pero no va tan lejos como para afirmar que el conocimiento es un discurso. De acuerdo con el constructivismo, la función primaria del lenguaje es expresar pensamientos individuales, no crear objetos culturales. Los pensamientos constituyen conocimiento en un individuo. Estos pensamientos son una función de los esquemas operacionales del sujeto que, aunque no son copias de una 'realidad externa', son todavía 'representaciones' en el sentido de modelos de las acciones del sujeto sobre alguna realidad física o mental.

1.3. El aprendizaje y la construcción subjetiva de significados

Para un educador matemático interaccionista, el aprendizaje no es precisamente un compromiso de la mente individual que intenta adaptarse a un entorno, o se reduce a un proceso de enculturación en una cultura preestablecida. Para el interaccionismo la construcción individual de los significados en la clase de matemáticas tiene lugar en interacción con la cultura de la clase, y al mismo tiempo contribuye a la constitución de esta cultura (Cobb y Bauersfeld, 1995, p. 9). De esta manera, *el aprendizaje* describe un proceso personal de formación, un proceso de adaptación interactiva a una cultura a través de la participación activa en dicha cultura (que en paralelo, reversiblemente, constituye la cultura en sí misma), más que una transmisión de normas y conocimiento objetivado. En este sentido, la práctica matemática en el aula es un proceso de matematización compartido que define una ‘subcultura’ especifica para ese profesor, esos alumnos y esa aula (Bauersfeld,1994; p. 140).

La *enseñanza* describe los intentos de organizar un proceso interactivo y reflexivo por el profesor implicado con los estudiantes en una secuencia realizable de actividades, y de establecer y mantener así una cultura de aula, más que de transmitir, introducir o incluso redescubrir un conocimiento codificado objetivamente y dado de antemano. Desde esta perspectiva interaccionista, las diversas construcciones subjetivas de significado y la necesidad de llegar a adaptaciones viables - “significados y regularidades compartidas” - requiere oportunidades para las discusiones y para la negociación de los significados (este aspecto será analizado en detalle en la sección 3). En este sentido, el uso didáctico de visualizaciones y materiales depende de las convenciones sociales compartidas, más que de un plan preparado, o del descubrimiento de estructuras matemáticas o de significado inherentes al material.

La noción de cultura, que surge del análisis del significado y de las formas de conocer las matemáticas vinculadas a una cierta práctica, plantea una perspectiva sobre el aprendizaje como forma de participación (Lave & Wenger, 1991) en la cual existe una interrelación mutua entre los miembros y su cultura (sin miembros no existe cultura) (Bauersfeld, 1995-a; p.281). Desde este punto de vista se entiende el desarrollo de la matematización en el aula como la constitución interactiva de una práctica social. Así, los resultados o productos de esta práctica social de matematización, que desde una perspectiva psicológica se describen como conocimiento matemático, aparecen como productos de una cultura específica. De esta manera los estudiantes llegan a lo que ellos conocen de matemáticas principalmente a través de su participación en la práctica social en el aula, más que descubriendo estructuras externas que existan independientemente de ellos (Bauersfeld, 1995-b).

1.4. Objetivos de las investigaciones del programa interaccionista

Como afirman Sierpinska y Lerman (1996), el fin de la mayor parte de la investigación del programa interaccionista en la educación matemática es lograr una mejor comprensión de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tal y como ocurren en los contextos escolares ordinarios. Hay menos interés en la elaboración de teorías para la acción y el diseño de acciones didácticas en sí mismas. Los resultados de la investigación en el programa interaccionista no conducen a recomendaciones para la acción sino a la descripción y discusión de diferentes posibilidades. No se pretende mejorar la microcultura de la clase de la misma manera que podemos cambiar el curríulum matemático o la macrocultura de la clase caracterizada por principios generales y estrategias de enseñanza. *"Deberíamos conceptualizar el cambio de una microcultura como una evolución mas bien que como una reorganización. Pero con el fin de influir y dirigir esa evolución, es útil comprender las regularidades y la dinámica de los procesos dentro de la vida de la clase"* (Voigt, 1995, p. 164).

Algunos de los problemas centrales que ve el interaccionismo para la educación matemática son:

- ¿Cómo se constituyen interactivamente los significados matemáticos en las diferentes culturas de la clase de matemáticas?
- ¿Cómo se estabilizan estos significados?
- ¿Cómo son estos significados y cómo dependen del tipo de cultura de la clase en que evolucionan?

2. NEGOCIACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS

El siguiente episodio, tomado de Bauersfeld, Krummheuer y Voigt (1988), de una lección de una clase de matemáticas sobre introducción de la probabilidad (con alumnos de 13-14 años) puede servir como ejemplo inicial del tipo de situaciones y cuestiones que tratan de estudiar los investigadores que comparten el punto de vista interaccionista simbólico:

Los resultados de lanzar 100 veces un dado se escriben en la pizarra. El 1 ha salido 11 veces, el 2, 16 veces, etc. El profesor comienza preguntando: "¿Qué observáis?"

Sin decirlo explícitamente, el profesor quiere que los estudiantes observen la variación de los diferentes resultados y relacionen las diferencias con el concepto de azar. Pero los estudiantes identifican regularidades tales como:

"Los números son parecidos" y

"Los números están entre 10 y 20".

Obviamente, el profesor no espera oír tales respuestas. A continuación intenta dirigir a los estudiantes hacia la dirección correcta, o sea a conectar las diferencias con la aleatoriedad.

Profesor: "Veis, los números son diferentes. Esto es normal, pero ¿por qué'?"

Un estudiante responde: "Los 100 lanzamientos no se pueden dividir entre 6".

La noción clave de este punto de vista es la de negociación de significados que en síntesis consiste en la construcción interactiva de la intersubjetividad. En principio, los objetos del discurso de la clase son plurisemánticos, y es típico de las situaciones de enseñanza y aprendizaje que el profesor trate de construir para los objetos significados que difieren de los construidos por los estudiantes. Por tanto, los participantes tienen que negociar el significado con el fin de llegar a un significado compartido, esto es, comprendido por todos los miembros de la cultura de la clase. Por medio de la negociación del significado, los participantes constituyen significados 'tomados como compartidos', aunque no 'compartan el conocimiento' necesariamente. Las concepciones individuales se han hecho compatibles de modo que los individuos interactúan como si adscribieran el mismo significado a los objetos, aunque un observador puede reconstruir diferentes significados subjetivos. Desde esta perspectiva, el significado matemático no es tomado como existente independientemente de los individuos que actúan y de su interacción, sino que es visto generado en el curso de la interacción social.

Aunque las comprensiones individuales de los profesores y estudiantes contribuyen a la generación de los significados matemáticos característicos de una cultura de la clase dada, puede que no sea posible atribuir la autoría de un significado a alguien en particular. Los significados se pueden elaborar por medio de negociaciones por las que el grupo llega a estar de acuerdo sobre ciertas convenciones en la interpretación de signos, situaciones y conductas. El resultado final de estas negociaciones tiene propiedades emergentes: por la interacción, las contribuciones individuales pueden añadir algo sobre lo que nadie en particular había pensado y anticipado.

2.1. Ambigüedad e interpretación

Voigt (1996) indica que según creencias populares, las tareas, cuestiones, símbolos, etc. de las lecciones matemáticas tienen significados bien claros y definidos. Con el fin de darnos cuenta de la relevancia del concepto de negociación, es necesario desafiar estas creencias. Si observamos cuidadosamente los microprocesos que tienen lugar en una clase, reconoceremos que las tareas y los símbolos son ambiguos y requieren interpretación.

¿Cuál es el significado de '5' para un niño pequeño en una situación específica? ¿Recuerda al alumno este signo actividades previas (p.e., "un número difícil de escribir") ¿Le evoca emociones específicas (p.e., "mi número favorito")? ¿Relaciona su significado con otros números (p.e., "Igual a 2+3, 1+4, 0+5")? Etc.

Una hipótesis hecha por los interaccionistas es que cada objeto o suceso en la interacción humana es plurisemántico. Esto se puede ilustrar observando las diferentes interpretaciones del problema de la figura 1 (Voigt, 1995, p. 167).

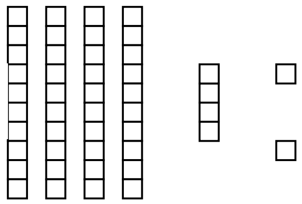
¿Cuánto tienes que añadir a  para obtener 73?

Fig. 1. *Tarea de barras-y-cuadrados correspondiente a 46 + __ =73*

Entre las posibles interpretaciones Voigt (1995; p.167) cita:

- El problema se puede interpretar como una actividad práctica. Las piezas tienen que ser conectadas manualmente una a otra, y se tiene que contar el número de cuadrados adicionales. No hay necesidad de identificar el primer número, o de contar las decenas".
- El problema puede dar lugar a operaciones con barras y cuadrados en la propia imaginación. Las barras que faltan y los cuadrados dados tienen que ser contados con el fin de obtener siete barras y tres cuadrados.
- El problema se puede interpretar como un problema de cálculo con unidades abstractas numéricas. La primera representación de un número tiene que ser enumerada. Después se tiene que calcular la diferencia entre los dos números según las reglas del sistema de numeración.

El significado de decena difiere en estas opciones de comprensión. Diez se puede tomar como la cantidad de varios objetos, o como el nombre de una barra estándar, o como una unidad. (Voigt, 1995, p. 168).

Otro ejemplo analizado en Voigt (1994) se refiere a la ambigüedad de un dibujo que representa una jaula con un mono que tiene dos plátanos en las manos y un cuidador con tres plátanos. Al pie del dibujo hay un esquema con casillas vacías del tipo □ ◯ □ = □, para que el alumno escriba una operación del tipo 5-2=3, según espera el profesor. Pero en realidad la situación puede ser interpretada de diversos modos:

2 + 3 = 5 (suma de plátanos)
5 - 2 = 3 (el guarda da dos plátanos al mono)
1 + 1 = 2 (el guarda y el mono)
3 - 2 = 1 (el guarda tiene un plátano más que el mono)
5 - 4 = 1 (un plátano mas que manos, el guarda perderá uno de los plátanos)

Las investigaciones realizadas bajo el punto de vista interaccionista ponen de manifiesto que, en principio, tales dibujos, problemas de los textos, juegos, historias, etc. tienen múltiples significados si los niños que interpretan la tarea no están familiarizados con el tipo específico de la misma. No obstante, muchos autores de textos y profesores de matemáticas parecen considerar que estos objetos tienen significados no ambiguos y que las tareas tienen soluciones definidas. Los procesos de matematización considerados como transparentes llegan a ser problemáticos cuando las situaciones se interpretan por sujetos que no son (aún) miembros de la cultura de la clase.

En las siguientes secciones presentamos una síntesis de los principales constructos teóricos elaborados por los investigadores que comparten el punto de vista interaccionista en educación matemática, particularmente Bauersfeld y colaboradores.

3. DOMINIOS DE EXPERIENCIA SUBJETIVA

Bauersfeld, Krummheuer y Voigt (1988, p. 177) elaboran un constructo teórico que denominan 'dominio de experiencia subjetiva' (DES), para adaptar al campo de estudio del aprendizaje matemático las nociones psicológicas de "script" (esquema, guión), "frame" (marco), "expert system" (sistema experto) y "microworld" (micromundo). Según el modelo DES el sujeto siempre forma experiencias en un contexto, en una situación dada. Estas experiencias son totales, esto es, no están limitadas a la dimensión cognitiva, incluyen también aspectos emocionales y motores. Según su especificidad situacional las experiencias de un sujeto se almacenan en la memoria en DES distinguibles. Por tanto, cada DES está formado inevitablemente por la totalidad y la complejidad de la situación en la misma medida en que ha sido experimentado y procesado como relevante por el sujeto.

Según el modelo de los DES, los conceptos generales, las estrategias y los procedimientos no están disponibles de manera general para la persona, esto es, independientemente de las situaciones. Los conceptos se activan desde la memoria de manera específica según su dominio de uso.

> *"Con el fin de comprender la 'misma' estructura matemática en contextos diferentes, 'la misma' tal y como es vista por el profesor, el aprendiz debe construir otro DES que le permita la comparación y conexión con el DES básico. Por tanto, las actividades de transferencia y abstracción llegan a un significado diferente según el modelo DES. Debido a la totalidad de la experiencia, el nuevo DES lleva su propia orientación específica para la acción, su propio lenguaje y*

> *sus propias normas. Como un proceso base para la transferencia o abstracción específica este nuevo DES facilita la relación de DES previos. Al mismo tiempo el nuevo DES mediatiza las reflexiones del sujeto sobre las primeras acciones" (Bauersfeld, Krummheuer y Voigt (1988; p. 178).*

Las acciones del sujeto y la construcción relacionada de significado, tal y como es configurada en la situación social, son las bases decisivas para el desarrollo de un DES. Especialmente en las clases de matemáticas las acciones subjetivamente significativas están fuertemente conectadas con los medios de presentación del contenido matemático. Sin embargo, lo que el profesor quiere significar no son los medios de presentación, los objetos, materializaciones, etc., sino una cierta estructura matemática, o un concepto matemático. Puesto que éstos no son perceptibles directamente, en sus construcciones de significado de las acciones e informaciones el estudiante se adhiere estrechamente a las acciones percibidas del profesor, de los compañeros y de otras personas relevantes. El proceso de negociaciones conducirá a la constitución de la acción relevante, aceptada o adecuada en el proceso interactivo. La realización subjetiva del tema matemático permanece por tanto ligada al contexto de la experiencia, a las materializaciones usadas, y a la interacción social, mientras que al mismo tiempo el DES se desarrolla por medio de las construcciones activas y espontáneas de significado por el sujeto.

La noción de "dominio de experiencia subjetiva" que acabamos de describir nos parece que se apoya estrechamente en los presupuestos básicos de la corriente cognitiva que se conoce como "cognición situada" (Brown, Collins y Duguid, 1989). Para estos autores el conocimiento queda referido a la situación de la que surge y en la que se usa, "las situaciones co-producen el conocimiento por medio de la actividad. Se puede argumentar que el aprendizaje y la cognición son fundamentalmente situadas" (p. 32)

4. PATRONES DE INTERACCIÓN

Debido a la ambigüedad y a las diferentes interpretaciones posibles, la negociación del significado de una situación particular es frágil. Incluso aunque se comparta un contexto, hay un riesgo permanente de un colapso y desorganización en el proceso interactivo. Los *patrones de interacción* funcionan para minimizar este riesgo. "Los patrones de interacción se consideran como regularidades que son interactivamente constituidas por el profesor y los estudiantes". (Voigt, 1995, p. 178). Son una consecuencia de la tendencia natural a hacer las interacciones humanas más predecibles, menos arriesgadas en su organización y evolución.

Según describe Voigt (1995), los patrones de interacción se ponen en juego en las situaciones sin que sean pretendidos ni reconocidos necesariamente por los participantes. Cuando los participantes constituyen una regularidad que el observador describe como un patrón de interacción, dicha regularidad está estabilizando un proceso frágil de negociación de significados.

Diversas investigaciones han identificado varios patrones de interacción en la clase, algunos de los cuales describiremos a continuación.

4.1. Patrones extractivo y de discusión

El *patrón extractivo* (elicitation pattern) (Voigt, 1985) apunta a la combinación de dos afirmaciones aparentemente contradictorias. La idea de extraer un cuerpo nítido de conocimiento matemático se yuxtapone con las afirmaciones de una clase liberal y centrada en el niño. En este patrón se distinguen tres fases:

- El profesor propone una tarea ambigua, y los estudiantes ofrecen diferentes respuestas y soluciones que el profesor evalúa previamente. Esta fase se corresponde con la afirmación de que los estudiantes son estimulados a realizar análisis variados y espontáneos y descubrimientos según su competencia.
- Si las contribuciones de los estudiantes son demasiado divergentes, el profesor les guía hacia un argumento, una solución, etc., definida. Creyendo que ayuda a los estudiantes, el profesor plantea pequeñas cuestiones y extrae dosis de conocimiento. Esta fase corresponde a la idea socrática según la cual el profesor extrae fragmentos de conocimiento que están asociados con pequeños pasos en el razonamiento.
- El profesor y los estudiantes reflexionan y evalúan lo obtenido.

El "*patrón de discusión*" (discussion pattern) presenta las siguientes características:

- Los estudiantes han resuelto el problema propuesto durante el trabajo en pequeños grupos.
- A continuación, el profesor pide que informe un estudiante.
- El estudiante presenta una solución al problema y la explica.
- El profesor contribuye a la explicación del estudiante mediante preguntas adicionales, observaciones, reformulaciones, o juicios, de manera que una

explicación o solución conjunta emerge y se toma como válida.

- El profesor pregunta a los estudiantes por otros modos de solución.
- Comienza de nuevo la primera fase.

Como afirma Voigt, hay algunas diferencias importantes entre ambos patrones de interacción. En el patrón extractivo, la solución es el fin principal; mientras que en el patrón de discusión la solución es el punto de partida de una explicación (similar al patrón de *afirmación - prueba* en las comunicaciones matemáticas, como ejemplo de patrón temático). En el patrón extractivo, los estudiantes se esfuerzan por seguir el modo de resolución del profesor paso a paso si quieren participar; mientras que en el otro patrón, la argumentación se beneficia de las contribuciones originales de los estudiantes. En un caso, las propias competencias del estudiante están escondidas, en el último caso se hacen públicas.

4.2. Patrones del embudo y de focalización

Voigt (1985) y Bauersfeld (1988) designaron como *patrón del embudo* (funnel pattern) al tipo de interacción entre profesor y alumnos caracterizado por el siguiente comportamiento:

- el profesor plantea un problema a los alumnos,
- los alumnos son incapaces de resolverlo,
- el profesor propone cuestiones más fáciles relacionadas con el problema y cuya solución conduce a resolverlo, pero sin que los alumnos pongan en juego una actividad intelectual mínimamente significativa.

El *patrón de focalización* (focussing pattern) (Wood, 1994) es inicialmente una variante del anterior, al tratar de crear, asimismo, las condiciones para el aprendizaje mediante una actividad conjunta. El profesor plantea un problema con un cierto nivel de dificultad para los estudiantes. Pero en lugar de resolver él prácticamente la cuestión,

- plantea una sucesión de preguntas con el objetivo de estrechar el foco de atención hacia un aspecto específico del problema, que es importante, pero que no es bien comprendido por los estudiantes;
- el profesor da al estudiante la oportunidad de resolver el problema, creando las condiciones para que reflexione sobre su razonamiento y para que explique su idea, al tiempo que proporciona oportunidades a los restantes compañeros para que doten de significado a ese aspecto específico del problema.

4.3. Otros ejemplos de patrones de interacción

Sierpinska (1996) describe dos ejemplos de patrones (o formatos) de interacción entre un tutor y un estudiante, identificados en una investigación sobre enseñanza de nociones de álgebra lineal elemental con ayuda de un libro de texto. Los denomina DATSIT! (¡ESO ES!) y ARUSURE? (¿ESTÁS SEGURO?), por lo que podríamos describir como *patrones afirmativo* e *interrogativo*, respectivamente. En ambos casos un estudiante lee una sección introductoria sobre independencia lineal de vectores en R^n.

Formato DATSIT (¡Eso es!):

La sección sobre dependencia/ independencia lineal leída en el libro por el tutor y el estudiante estuvo precedida por una sección sobre sistemas homogéneos de ecuaciones y precedida por una explicación que transmitía la idea de que la nueva noción no es realmente nueva, porque se reduce a un cierto tipo de cuestiones sobre las soluciones de sistemas homogéneos de ecuaciones. El estudiante ha terminado de leer las definiciones y un ejemplo resuelto, donde la cuestión: ¿El siguiente conjunto de tres vectores de tres dimensiones es linealmente dependiente o independiente?, se respondía resolviendo y analizando la solución de un sistema homogéneo de ecuaciones. El tutor procedió a continuación, como era su costumbre, a una pequeña revisión o repetición de lo que se había leído.

Tutor: Así que, un conjunto de vectores se dice que son linealmente independientes cuando ... (levantando la voz)?

Estudiante l: (tímidamente) Cuando solo hay una solución trivial.

Tutor: ¡Eso es!

Estudiante l: (asombrado) ¡Oh, ! ¿Eso es?

Formato ARUSURE? (¿Estás seguro?):

Después de haber leído las definiciones de "conjunto de vectores dependientes e independientes", el estudiante exclama:

Estudiante: ¡Me parece que eso sólo puede ocurrir en casos muy especiales!

Tutor: ¿Qué es lo que puede ocurrir sólo en casos especiales?

Estudiante: Que la suma de algunos vectores multiplicados por algunos números pueda dar cero.

(señala a $a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0$). Esto puede suceder solo muy excepcionalmente.

Tutor:¿Estas seguro? ¿Podemos encontrar algunos ejemplos?

La siguiente hora de clase, tutor y estudiante, se dedicaron a tomar vectores e intentar si era posible obtener cero multiplicándolos por algunos números, llegando a la convicción de que era raro pero no imposible. Concluyeron que para que dos vectores fueran dependientes es suficiente que uno de ellos sea múltiplo del otro, y que en el plano tres vectores son siempre dependientes, etc. El libro se dejó aparte.

El tutor podía haber respondido: *¡pero hombre, lee el enunciado y verás pronto que no estás en lo cierto!* Pero el tutor no hizo eso, sino que tomó seriamente las dudas del estudiante. Tomándole con seriedad le transmitía el mensaje de que su conducta dubitativa era correcta, y que era bien recibida. A medida que esta interacción se repite, se convierte en un formato de interacción aceptado o estándar.

En opinión de la mayoría de los expertos en educación matemática el formato ¿ESTÁS SEGURO? debería ser practicado, mientras que el ¡ESO ES! se considera criticable, ya que conduciría a una comprensión superficial e instrumental. Esto no quiere decir que los profesores que practiquen este segundo patrón no obtengan "buenos rendimientos" entre sus estudiantes. Con más de un estudiante el patrón de interacción ¿ESTÁS SEGURO? puede funcionar sólo en casos muy especiales, por ejemplo, en clases pequeñas con estudiantes interesados en aprender realmente y no meramente en aprobar.

4.4 Patrones temáticos

Los patrones de interacción presentados previamente no son específicos de las clases de matemáticas; se pueden reconstruir en otras clases también, pero los "patrones temáticos de interacción" son más específicos de las clases de matemáticas. Un patrón temático se produce cuando el profesor y los estudiantes constituyen interactivamente relaciones entre significados matemáticos compartidos. Desde el punto de vista del observador, Voigt (1996) denomina a estas relaciones de significado un *tema matemático*. La variedad de opciones para continuar el tema se restringe por las convenciones de interpretación específicas de la tarea a realizar

El proceso de dotar de significado a un tema está basado en un consenso de trabajo y es un producto de la negociación. Un consenso de trabajo es un acuerdo tentativo logrado mediante la negociación en la interacción social. Se considera como un 'modus vivendi' mas bien que una congruencia de significado relacionada con el contenido. En los procesos de enseñanza-aprendizaje, un consenso de trabajo es extremadamente provisional y frágil.

En el patrón temático de *matematización directa,* una historia o un dibujo es interpretado como un problema de cálculo específico, mientras que otras interpretaciones alternativas no se consideran como del tema. En el caso de la resolución de la tarea de la figura 1, Voigt (1995, p. 188) identifica dos patrones temáticos de interacción que indicamos en la tabla l.

TI: ***Patrón temático de contaje de Materiales***	**T2:** ***Patrón temático de cálculo con números de dos dígitos***
Trabajando juntos, algunos estudiantes interpretan los signos como representaciones de materiales concretos. Comparan las barras y los cubos separadamente. Una solución típica sería: Añadir 3 barras y quitar 3. *El tema* son las cantidades de materiales	Trabajando juntos, algunos estudiantes interpretan los signos como representaciones de signos. La diferencia se calcula dentro del sistema de los números. Una solución típica sería: 46, 56, 66 son 20, y 4, 3, es 27. *El tema* es la aplicación de reglas aritméticas

Tabla l. *Dos patrones temáticos*

Para Voigt (1996) el tema matemático es el significado dado a la tarea que se está realizando por parte de los estudiantes desde la perspectiva del observador. En el ejemplo anterior, el significado matemático dado a la tarea por parte de los estudiantes se infiere del proceso de resolución empleado y de la naturaleza de las interacciones producidas. Aunque la tarea es la misma, el *significado matemático* que el observador infiere a partir de las interacciones es diferente. En un caso se trata de la noción de decena asociada a un modo de representación concreto-físico y el establecimiento del paralelismo entre las supuestas relaciones entre números con la manipulación del material; el tema "matemático" derivado de las interacciones se identifica por el observador como "manipular cantidades de materiales". Sin embargo, en el segundo caso, el observador puede inferir a partir de las interacciones observadas que el tema matemático para los resolutores es la aplicación de reglas aritméticas. De hecho lo que el análisis de los patrones temáticos intenta mostrar es que el *tema* puede que no sea una representación del contenido matemático que el profesor pretende establecer.

5. NORMAS SOCIALES Y SOCIOMATEMÁTICAS

Las interacciones entre profesor y alumnos están con frecuencia regidas por 'obligaciones' o normas no explícitas. En las primeras secciones de este trabajo habíamos indicado los supuestos que colocan las perspectivas interaccionistas sobre el uso del lenguaje (entendido ampliamente), subrayando la importancia de la negociación de los significados como una manera de dar cuenta de cómo los estudiantes desarrollan la comprensión de las nociones matemáticas y desarrollan creencias y actitudes en relación a las matemáticas.

El siguiente episodio es un ejemplo de estas normas implícitas en el aula. En esta viñeta extraída de la clase de introducción a la probabilidad que habíamos mencionado con anterioridad, un estudiante no cumple las expectativas del profesor, esto es, viola una obligación desde el punto de vista de un observador externo. El profesor procura mantener el sentido de normalidad y la imagen de una clase orientada al ideal popular del aprendizaje por descubrimiento (Voigt, 1994, p. 182):

Profesor:Es suficiente por el momento. No podemos escribir todos los resultados, ¿verdad? ¿Alguien ha observado algo?

Estudiante:¿Qué se supone que debo observar?

Profesor: ¿Que se supone que debes observar? Algo que debes saber por ti mismo. Berta, ¿has observado algo?

También las actividades del profesor están sujetas a obligaciones. Por ejemplo, en las clases tradicionales los estudiantes esperan a menudo que el profesor presente un algoritmo oficial para resolver los problemas paso a paso sin necesidad de tener que reflexionar (¿qué hacer a continuación?) "Así, que los estudiantes no son solo las 'víctimas' de esta cultura escolar sino también los 'culpables'" (Voigt, 1994; p. 182-3).

Las *normas sociales* en el seno de la clase son convenciones que describen cómo colaborar unos con otros, así como las obligaciones que describen cómo reaccionar socialmente ante un error o una indicación. La investigación sobre la enseñanza ha identificado la existencia de unas normas sociales que ayudan a caracterizar las microculturas del aula. Algunas de estas normas sociales son generales y se pueden aplicar en cualquier aula independientemente de la disciplina. Regulan el funcionamiento de las actividades docentes y discentes. Por ejemplo, se supone que en la clase los alumnos deberían adoptar una actitud crítica hacia las afirmaciones que se hacen, tanto por uno mismo como por los demás, independientemente de si se trata de una clase de matemáticas, como de ciencias o de literatura. Se espera (norma social) que los estudiantes expliquen las soluciones que proponen a cualquier cuestión. Son normas sociales caracterizadas por explicar, justificar y argumentar ya que se supone que en situaciones ideales los estudiantes deberían desafiar las explicaciones y justificaciones de sus compañeros, asi como justificar sus propios argumentos Sin embargo, existen aspectos normativos de la discusión matemática que son específicos de la actividad matemática de los estudiantes. Por ejemplo, la comprensión de lo que en el aula se puede considerar "matemáticamente diferente", "matemáticamente sofisticado", "matemáticamente eficiente" y "matemáticamente elegante", así como lo que se puede considerar como una explicación matemáticamente aceptable. Voigt (1995) identifica, además, como normas sociomatemáticas,

- las normas de clase que implican la valoración de una solución a un problema como inteligente o inventiva , y
- las explicaciones y argumentaciones consideradas como matemáticamente correctas.

Es decir, las normas sociomatemáticas son aspectos normativos de las discusiones matemáticas que son específicas de la actividad matemática de los estudiantes y que regulan las argumentaciones matemáticas e influyen en las oportunidades de aprendizaje. Desde esta perspectiva, por tanto, las normas sociomatemáticas son, en la perspectiva social, el correlato de las creencias y valores identificados en la perspectiva psicológica al intentar dar cuenta de cómo los estudiantes llegan a ser intelectualmente autónomos en matemáticas (una cuestión vinculada al dominio de las creencias y actitudes). En este sentido, lo que llega a ser matemáticamente normativo en un aula viene condicionado por los objetivos reales, las creencias, las suposiciones e hipótesis de los participantes en el aula, al mismo tiempo que estos objetivos y la comprensión están influenciados por lo que es legitimado como actividad matemática aceptable (Yackel & Cobb, 1996).

Las normas sociomatemáticas son diferentes de las normas sociales generales que rigen el comportamiento en las aulas en el sentido de que son específicas de los aspectos matemáticos de la actividad de los estudiantes. En este contexto, ya que el desarrollo del razonamiento y los procesos de dotar de sentido desarrollado por los estudiantes no puede ser separado de su participación en la constitución interactiva del significado matemático, es por lo que se da tanta importancia a las normas sociomatemáticas. Sin embargo, Yackel y Cobb (1996) indican que la distinción entre la normas sociales y las normas sociomatemáticas en las aulas son sutiles, indicando como una manera de diferenciarlas lo siguiente: "la comprensión que se le supone a los estudiantes para explicar sus soluciones y sus formas de pensar es una norma social, mientras que la comprensión de lo que se considera como una explicación matemáticamente aceptable es una morma sociomatemática" (Yackel & Cobb, 1996; p. 461). Es decir, existen unas normas sociales que rigen una discusión y un intercambio de argumentos independientemente de lo que se esta diciendo (norma social, por ejemplo que se deben presentar argumentos diferentes de los que se han presentado hasta ese momento), junto con el reconocimiento de lo que es matemáticamente aceptable, teniendo en cuenta sobre lo que se esta hablando (norma sociomatemática, por ejemplo que lo propuesto es matemáticamente diferente). Metodológicamente, tanto las normas sociales generales como las normas sociomatemáticas se infieren al identificar regularidades en los patrones de interacción social.

5.1. La constitución y desarrollo de las normas sociomatemáticas.

Voigt (1995) explica con un ejemplo el proceso de constitución de una norma sociomatemática de lo que es "matemáticamente diferente". En el experimento de enseñanza que analiza en este trabajo se propone a los estudiantes resolver las tareas siguientes:

$$27 + 9 = \_\_ \; ; \; 37 + 9 = \_\_ \; ; \; 47 + 9 = \_\_ \; ; \; 47 + 19 = \_\_ \; ; \; 48 + 18 = \_\_ \; ; \; 49 + 17 = \_\_ \; ; \ldots$$

Muchos estudiantes resolvieron las tareas como problemas aislados, usando los dedos, marcas, u otros materiales. Otros compararon las tareas y usaron las soluciones previas para resolver las siguientes. A continuación, durante la discusión con toda la clase, se compararon diferentes modos de resolución. La profesora aceptó todas las explicaciones correctas. Por ejemplo, la profesora dijo: "Este ha sido un modo de hacerlo. Ahora, ¿quién lo hizo de un modo diferente?". En contextos donde los estudiantes están obligados a intentar soluciones personalmente significativas que deben ser explicadas y justificadas la intervención de la profesora en el sentido de preguntar si alguien había *resuelto el problema de manera diferente*, es una característica del inicio del proceso de constitución de la norma sociomatemática de lo que es "matemáticamente diferente". De hecho, Yackel & Cobb (1996) señalan que en las aulas que ellos analizaron no había criterios dados de antemano para considerar cuándo una solución era diferente. Así, el significado de lo que constituía algo "matemáticamente diferente" era negociado por el profesor y sus estudiantes a través de la interacción. Las acciones y respuestas del profesor condicionaban el desarrollo de la comprensión de los estudiantes de lo que podía significar matemáticamente diferente, y las respuestas de los estudiantes contribuían al desarrollo de la comprensión del profesor. En el caso particular de lo que constituye una solución matemáticamente diferente estos autores señalan que la petición del profesor de soluciones diferentes provoca un cambio de contexto, de uno de resolver el problema a otro de comparar soluciones. Así, el contexto de la actividad del estudiante se amplía más allá de escuchar a intentar dotar de sentido a las explicaciones de los demás, intentado identificar semejanzas y diferencias entre diversas soluciones como se puede apreciar en el siguiente ejemplo (Yackel & Cobb, 1996; p. 463):

Ejemplo: El problema 78-53 = __ estaba escrito en la pizarra y se presentó como una actividad de cálculo mental.

Dennis: Dije, um, 7 y le quito 50, lo que es igual a 20

Profesor: Correcto

Dennis: Luego, luego quité, quité 3 de 8 y quedan 5.

Profesor: OK, ¿y cuánto te queda?

Dennis: 25 ....

.../...

Profesor: Ella?

Ella: Yo dije el 7, el 70, dije el 70 menos el 50 ... dije 20 y 8 más 3, ...
Oh!, sumé, dije 8 menos 3 serán 5.

Profesor: Correcto. ¿Esto tiene que ser?

Ella: Y esto es 75 ... quiero decir 25.

Dennis (protestando): Mr. K., es lo mismo que yo dije.

Por otra parte, Yakel & Cobb (1996) sostienen que el considerar lo que permite aceptar como soluciones diferentes, sofisticadas, eficientes y elegantes en matemáticas implica un sentido compartido de cuándo es apropiado contribuir en una discusión; y lo que da cuenta de cuándo una explicación y justificación es aceptable tiene que ver con el proceso real mediante el cual los estudiantes contribuyen a la constitución del significado compartido.

5.2. El papel del profesor en la constitución y evolución de las normas sociomatemáticas.

En el primer ejemplo propuesto la profesora evaluó de manera diferente las explicaciones de las respuestas correctas. Enfatizó aquellos procedimientos que parecían ser más elaborados desde el punto de vista cognitivo, como identificar un patrón en la serie de operaciones. En las clases observadas por Voigt (1995 y Yackel y Coob (1996), la profesora caracterizó tales soluciones como modos "inteligentes" o "simples", como "descubrimientos", etc.. También esbozó la estructura matemática explícitamente, o pidió a los estudiantes que explicaran sus métodos una vez más al tiempo que requería a los demás estudiantes que escucharan, o bien expresó admiración. Mediante estas evaluaciones, la profesora hacía valoraciones matemáticas implícitamente de lo que podía ser considerado “matemáticamente diferente”, “matemáticamente sofisticado”, “matemáticamente eficiente” o “matemáticamente elegante” y que los estudiantes decidían seguir o no. En este caso, lo que cuenta como una solución matemática elegante se constituyó interactivamente. La profesora no estableció un estándar que los estudiantes tenían que obedecer paso a paso. Algunos estudiantes, y no la profesora, ofrecieron contribuciones matemáticamente avanzadas. La profesora evaluó las contribuciones, de modo que representaba a la disciplina matemática. Los estudiantes podían tomar las evaluaciones de la profesora como observaciones para realizar exploraciones más avanzadas. Por medio de estos procesos de interacción la calidad del discurso matemático evoluciona. Como consecuencia, las exigencias de la profesora y los fines de los estudiantes se acoplan.

Aunque el profesor puede ser visto como el representante de la institución escolar, y de la disciplina matemática, las normas constituidas dependen de la comprensión de los estudiantes, sus actitudes, voluntad, etc. Son constituidas en las interacciones de la clase y consideradas como compartidas. Las normas sociomatemáticas no son obligaciones explícitas que los estudiantes tengan que cumplir, facilitan los intentos de los estudiantes para dirigir sus actividades en un entorno que proporciona libertad relativa para interpretar y resolver problemas matemáticos.

La negociación de las normas sociomatemáticas también genera oportunidades de aprendizaje para el profesor (McClain & Cobb, 1997). Las discusiones en el aula permiten que el profesor pueda escuchar y dotar de sentido a las explicaciones de los estudiantes, lo que le permite poder seleccionar las tareas que se les puede presentar a los alumnos de una manera más desafiante en relación al tipo de soluciones que presentan. De esta manera, el tipo de tareas que el profesor presenta y la organización del contenido matemático implícito en la secuencia de dichas tareas muestra la evolución de su comprensión del desarrollo conceptual y de la actividad matemática de sus estudiantes.

6. TEORÍA DE SITUACIONES E INTERACCIONISMO SIMBÓLICO

Aunque la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1996) debe entenderse como un modelo teórico independiente del enfoque del interaccionismo simbólico, tanto por su propia aspiración a constituir una epistemología experimental de las matemáticas como por la ausencia de cualquier referencia mutua, nos parece que algunos elementos de la teoría de situaciones guardan, de hecho, una estrecha relación con nociones acuñadas por el I. S. Así ocurre, por ejemplo, con los fenómenos de didáctica que Brousseau denomina "efecto Topace" y "efecto Jourdain", los cuales se pueden describir como patrones de interacción profesor-alumno-saber. Asimismo, la noción de *contrato didáctico*, clave en la teoría de situaciones, nos parece que responde parcialmente a la descripción de las normas sociomatemáticas. Analizamos, a continuación, con algo más de detalle estas similitudes.

Brousseau asegura que la relación didáctica entre profesor, alumnos y un saber pretendido está condicionada por un proyecto social exterior que se impone tanto a uno como a otro.

> *"Se establece una relación que determina -explícitamente en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente- lo que cada participante, el profesor y el alumno, tienen la responsabilidad de administrar y de la cual será de una u otra forma responsable ante el otro. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato. Lo que nos interesa aquí es el contrato didáctico, es decir, la parte de ese contrato que es específico del "contenido": el conocimiento matemático pretendido" (Brousseau, 1986, p. 51).*

Las actuaciones del profesor y los alumnos deben cumplir las siguientes expectativas:

- el profesor debe crear las condiciones suficientes para que los alumnos se apropien de cierto conocimiento, y que reconozca cuándo se produce tal apropiación;
- el alumno debe cumplir las condiciones establecidas por el profesor;
- la relación didáctica debe "continuar", cueste lo que cueste;
- el profesor debe garantizar que los conocimientos anteriores y las nuevas

condiciones creadas dan a los alumnos la posibilidad de apropiarse del conocimiento.

Sin embargo, al igual que en el I. S. donde las normas sociomatemáticas son negociadas en el seno de la clase, lo esencial del "contrato didáctico" no son las normas que restringen las actuaciones del profesor y los alumnos, sino el proceso de búsqueda (negociación) de un contrato hipotético.

Como hemos visto, en el I. S. se distinguen las normas sociales de las normas sociomatemáticas. También en teoría de situaciones el contrato didáctico forma parte del contrato pedagógico y del contrato escolar, los cuales dan cuenta de restricciones más generales de los papeles docentes y discentes. Chevallard, Bosch y Gascón (1997, p. 205) explican claramente las diferencias entre los tres tipos de contratos. Un alboroto en una clase de matemáticas puede ser explicada bien porque hay un pequeño grupo de alumnos que no están integrados realmente en la escuela y preferirán estar en otro sitio (ruptura del contrato escolar), o bien a los alumnos no les gusta el "estilo" pedagógico del profesor -no tiene suficiente autoridad, menosprecia a los alumnos, etc.- (ruptura del contrato pedagógico), o bien quizás el profesor está resolviendo un problema por una técnica que los alumnos desconocen (ruptura del contrato didáctico).

El llamado "*efecto Topaze*" es un formato de interacción, que se explica por las restricciones del sistema social en que puede tener lugar la enseñanza, y que se traduce en una pérdida del sentido matemático de los conocimientos pretendidos. El profesor propone una tarea a sus alumnos cuya respuesta está generalmente más o menos predeterminada; el profesor negocia las condiciones en las que se producirá y que le darán un sentido. Inicialmente intenta que este sentido sea lo más rico y exacto posible y, para ello, propone preguntas lo más abiertas posibles. Pero en el caso frecuente de que los alumnos fracasen, comienza a dar informaciones suplementarias para hacer la respuesta más fácil.

> *"Si los conocimientos pretendidos desaparecen completamente, es el 'efecto Topaze'. El mantenimiento del sentido a través de los cambios en las cuestiones está bajo el control de los conocimientos del maestro en la disciplina enseñada pero la elección de las situaciones de aprendizaje y su gestión, habitualmente dejada al "buen sentido" de los profesores, son actualmente objeto de activas investigaciones tanto teóricas como de ingeniería didáctica" (Brousseau, 1986, p. 42).*

El "*efecto Jourdain*" es una forma del efecto Topace: para evitar un debate sobre el conocimiento pretendido con el alumno y eventualmente la constatación de un fracaso, el profesor acepta reconocer como índice de un saber o de un avance auténtico una respuesta o un comportamiento del alumno que no son de hecho más que respuestas que tienen causas triviales y, por tanto, desprovistas de valor o incluso de sentido.

Estas descripciones nos parecen ciertamente similares a las que Bauersfeld y Voigt dan del patrón de interacción que denominan del "embudo" (funnel pattern). Pero el análisis de los patrones de interacción no queda reducido a las relación entre profesor y alumnos en la teoría de situaciones. Brousseau trata de caracterizar fenómenos de didáctica, esto es, regularidades observables en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas explicables dentro de un marco teórico propio. Por ello también describe como fenómenos de didáctica, entre otros, el denominado "*deslizamiento metacognitivo*" y el "*envejecimiento de las situaciones didácticas*", en los cuales, los patrones de interacción se refieren a relaciones entre el profesor y los recursos didácticos y las propias situaciones, respectivamente. La propia tipología de situaciones didácticas que se elabora (acción, formulación-comunicación, validación, institucionalización) puede ser vista también como formatos de interacción profesor- alumnos – saber – medio, que condicionan y determinan los significados de los conocimientos puestos en juego en la clase de matemáticas, y por tanto los aprendizajes alcanzables.

7. SÍNTESIS Y OBSERVACIONES FINALES.

En esta última sección vamos a realizar una síntesis y algunas observaciones sobre el interaccionismo simbólico como programa de investigación en educación matemática centrándonos en,

- la complementariedad entre el análisis de la estructura y la naturaleza de las interacciones, con la consideración de la estructura del contenido matemático; y
- el equilibrio entre aproximaciones individualistas y colectivistas en el análisis del aprendizaje matemático.

En el I. S. la noción de significado (de un objeto) nace de la relación entre el sujeto y el objeto. Un objeto es "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia" (Blumer, 1982, p. 8). "La naturaleza de un objeto -de todos y cada uno de ellos- consiste en el significado que éste encierra para la persona que como tal lo considera. El significado determina el modo en que una persona ve el objeto, la manera en que está dispuesta a actuar con respecto al mismo y la forma en la cual se dispone a hablar de él" (p. 8). Pero, además, se introduce la dimensión social indicando que el significado es fruto del proceso de interacción entre individuos, un producto social, una creación que emana de, y a través de, las actividades definitorias de los individuos a medida que éstos interactúan. El énfasis se pone en la descripción de los procesos por los cuales se entienden las personas, esto es, los procesos por medio de los cuales se ponen de acuerdo sobre lo que refieren las palabras, signos, acciones, y también sobre el valor, la utilidad e importancia de las cosas. El I. S. se propone describir, comprender los patrones de interacción en el seno de la clase de matemática, para inferir los significados puestos en juego, pero no juzgar ni prescribir cómo son o deberían ser tales patrones, ni incluso tales significados. Esta característica del I.S. la expresa Sierpinska (1997, p. 11) con claridad:

″Se supone que estudiamos e intentamos comprender los fenómenos de la enseñanza, no juzgarlos ni decir qué formatos [patrones] son "buenos" o "malos". De hecho, el valor de un formato particular sólo se puede juzgar en términos de los objetivos y expectativas de los participantes de la interacción... Todo juicio implica una cierta ideología. El interaccionismo propone una actitud filosófica hacia las ideologías: discutir sin tomar partido″.

Coincidimos con Seeger (1991, p. 138) cuando afirma que las investigaciones realizadas bajo el marco del interaccionismo simbólico han demostrado que el proceso de enseñanza y aprendizaje matemático no se puede estudiar sin una referencia a la dimensión interactiva de la representación y la adquisición del conocimiento. “Pero, no se puede prescindir -como hace el interaccionismo simbólico- de la estructura del contenido. Dado que cualquier tipo de aprendizaje y conocimiento es el resultado de un proceso social, la interacción no se puede ver como opuesta al conocimiento”. Con esta cita se subraya la necesaria complementariedad entre los análisis centrados en la naturaleza y estructura de las interacciones y en lo que se considera el contenido de estas interacciones (los objetos y procesos matemáticos). En los dominios científicos hay unos significados establecidos para la clase de objetos que se consideran -sean símbolos o entidades conceptuales- que deben ser asumidos por las personas que tienen que participar de la cultura científica correspondiente. En consecuencia, pensamos que es necesario complementar los presupuestos semióticos del I.S. con modelos epistemológicos explícitos sobre la naturaleza y estructura de las objetos matemáticos para poder describir y explicar los procesos de generación y desarrollo de los objetos matemáticos (Escudero & Sánchez, 1999). Otros modelos teóricos para la didáctica de las matemáticas que adoptan la noción de significado como central y que tienen en cuenta la estructura del conocimiento matemático son los elaborados por Godino y Batanero (1994; 1999) y Steinbring (1997).

Por otra parte, la aproximación interaccionista media entre el individualismo y el colectivismo. A grandes rasgos, el individualismo tiende a explicar el aprendizaje matemático como el producto de las leyes del desarrollo cognitivo y de la auto-orientación del individuo que experimenta un problema. El colectivismo intenta comprender el aprendizaje matemático como la socialización del individuo en una cultura dada previamente. Desde el punto de vista interaccionista, los estudiantes y el profesor se influyen mutuamente. De hecho, las influencias sutiles e indirectas son especialmente importantes. El profesor y los estudiantes constituyen interactivamente los significados matemáticos y las normas sociomatemáticas se comparten de modo que el aprendizaje de los estudiantes y la microcultura se desarrollan mutuamente.

Algunos interaccionista han visto complementariedad, si no compatibilidad, entre el constructivismo y el interaccionismo, o entre la teoría de Vygotsky y el interaccionismo. El constructivismo y el interaccionismo son complementarios en el sentido de que toman perspectivas diferentes sobre el conocimiento de las personas. En el constructivismo es el punto de vista del individuo el que trata de darle sentido al mundo. En el interaccionismo es el punto de vista de un observador de la vida social; mira a las personas compartiendo significados y al funcionamiento del lenguaje como creador de significados.

Sin embargo, hay profundas diferencias entre las dos aproximaciones, especialmente las que se refieren al modo en que ven el lenguaje, la comunicación y el conocimiento. Tanto Gergen como Bauersfeld ven las aproximaciones que promueven (construccionismo social e interaccionismo, respectivamente) como pasos teóricos en la superación de un dualismo epistemológico. Para Bauersfeld, el interaccionismo es un modo de superar el dilema entre las visiones individualistas y colectivistas sobre las fuentes de significado. De acuerdo con el interaccionismo, los significados no son generados ni por mentes individuales ni son un atributo de una 'mente colectiva' de una sociedad históricamente fundada, sino que están continuamente constituidos en interacciones cuyo carácter modelado (patterned) da cuenta de la relativa estabilidad de las culturas. Gergen (1995) ve el construccionismo social como una epistemología que supera la oposición tradicional entre lo que él llama orientaciones hacia el conocimiento exógenas (empíricas y centradas en el mundo) y la endógena (racionalista y centrada en la mente).

Como afirman Sierpinska y Lerman (1996), el interaccionismo rehabilita algunos valores 'pasados de moda' en la educación. Por ejemplo, el aprendizaje imitativo 'es la forma más común de aprendizaje en una cultura'. Otra posición importante que defiende es que la gente aprende indirectamente, mediante la participación en una cultura y en sus prácticas discursivas. El profesor, sin embargo, juega un papel importante: "Como un agente de la cultura inmersa, el profesor funciona como un compañero con una misión especial y con poder en la cultura de la clase. El profesor, por tanto, tiene que tener un cuidado especial sobre la riqueza de la cultura de la clase -riqueza en ofrecimientos, desafíos, alternativas, y modelos, incluyendo el lenguaje" (Bauersfeld, 1995, p. 283)

REFERENCIAS

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. En T. Coony y D. Grows (Eds.), *Effective Mathematics Teaching* (p. 27-46). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics/ Erlbaum.

Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. En R. Biehler; R. Scholz; R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 133-146). Dordrecht, NL: Kluwer Academic Pb.

Bauersfeld, H. (1995-a). "Language Games" in the mathematics classroom: their function and their effects. En Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.). *The Emergence of Mmeaning: Interaction in Class-room Cultures* (pp.271-292). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Bauersfeld, H. (1995-b).The structuring of the structures: Development and function of mathemathizing as a social practice. En L. Steffe y J. Gale (Eds.). *Constructivism in Education.* (pp. 137-158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Pub.

Bauersfeld, H., Krummheuer, G. y Voigt, J. (1988). Interactional theory of learning and teaching mathematics and related microethnographical studies.En H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds.). *Foundations and Methodology of the Discipline Mathematics Educatíon (Didactics of Mathematics)* (pp. 174-168). Antwerp: Proccedings of the 2nd TME-Conference. University of Antwerp.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspective and method.* Englewood Cliffs, NJ.:Prentice-Hall. [El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1982].

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7* (2): 33-115.

Brown, J. S., Collins, A. Y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, January-February: 32-42.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas; el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE Universidad Autónoma/Horsori.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures.* Hillsdale, N.J.:Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Escudero, I. & Sanchez, V. (1999) The relationships between professional knowledge and teaching practice: the case of similarity. *Proceedings of the PME-23, Haifa, Israel*.

Gergen, K. J. (1995). Social construction and the educational process. En, L. P. Steffe y J. Gale (Eds). *Constructivism in Education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Pub.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 14* (3): 325-355. [Recuperable en URL: http://www.ugr.es/loca/jgodino/articulesp.htm].

Godino, J. D. y Batanero, C. (1999). Funciones semióticas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), *IX Seminário de Investigaçao en Educaçao Matematica*. Viana do Castelo: Associaçao de Profesores de Matematica. [Recuperable en URL: http://www.ugr.es/loca/jgodino/articulesp.htm].

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripherical participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

McClain, K. y Cobb, P. (1997). *An analysis of the teacher's role in guiding the evolution of sociomathematical norms.* Vanderbilt University.

Seeger, F. (1991). Interaction and knowledge in mathematics education. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*,11 (3): 125-166.

Sierpinska, A. (1996). Whither mathematics education? En C. Alsina et al. (Eds.), *Acta del 8º Congreso International de Educación Matemática* (pp. 21-46). Sevilla: Sociedad Thales.

Sierpinska, A. (1997).Formats of interaction and model readers. *For the Learning of Mathematics*, 17, 2: 3-11.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemology of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop et al. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, NL: Kluwer, Academic Publ.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics,* 32: 49-92.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 6 (1): 69-118.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 26: 275-298.

Voigt, J.(1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.). (pp. 163-199).

Voigt, J. (1996). Negotiation of mathematical meaning in classroom processes: Social interaction and learning mathematics. En L. Steffe; P. Nesher; P. Cobb; G. Goldin & B. Greer (Eds.) *Theories of Mathematical Learning* (pp. 21-50). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Pub.

Wood, T. (1994) Patterns of interaction and the culture of the mathematics classroom. En S. Lerman (Ed.). *Culture Perspectives on the Mathematics Classroom* (pp.149-168). Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publ.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4): 458-477.

14

COMUNIDAD IBEROAMERICANA VIRTUAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA[1]

Juan D. GODINO, Universidad de Granada

Jesús ENFEDAQUE, Universidad de Barcelona

Resumen

Analizamos las posibilidades de Internet para potenciar las relaciones e interacciones en el colectivo de educadores matemáticos en los países iberoamericanos. La existencia de diversas sociedades nacionales de investigadores y profesores de matemáticas, de revistas, jornadas, simposios, así como foros de discusión propios, nos lleva a proponer la creación de una Comunidad Iberoamericana Virtual de Educación Matemática (CIVEM), apoyada en el soporte técnico de RedIris del CSIC. Esta red telemática permitirá potenciar la comunicación entre los diversos colectivos y el desarrollo cooperativo de proyectos de innovación e investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

1. INTRODUCCIÓN

Vamos a centrar nuestra contribución al tema de la mesa redonda sobre "Internet como herramienta y objeto para la investigación en didáctica de la matemática", en el IV Simposio de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática), en presentar información sobre los recursos ofrecidos a través de Internet para potenciar las relaciones e interacciones entre las comunidades científicas y profesionales interesadas por la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como en el desarrollo del área de conocimiento de didáctica de la matemática.

---

1 En J. Carrillo, L. C. Contreras y N. Climent (Eds.) (2000). *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Huelva: Universidad de Huelva.

Vamos también a analizar las acciones necesarias para potenciar el uso de los recursos disponibles y sobre todo la creación de vínculos entre las sociedades y comunidades constituidas cuyo objetivo común es promover la mejora de la educación matemática en el ámbito iberoamericano. En particular analizaremos el funcionamiento de los foros de discusión Indimat y Edumat, las posibilidades de colaboración mutua, la creación de otros grupos de discusión orientados a temas específicos, así como el uso de estos dispositivos para potenciar el logro de los objetivos de la SEIEM y su proyección internacional, en particular en la comunidad iberoamericana. Consideramos que la SEIEM puede desempeñar un papel promotor en la puesta en marcha de una Comunidad Iberoamericana Virtual de Educación Matemática (CIVEM), tratando de superar el relativo aislamiento y descoordinación de las distintas sociedades y recursos disponibles.

2. COMUNIDADES VIRTUALES: POSIBILIDADES Y MEDIOS DISPONIBLES

Una comunidad se define en términos de comunicación; si se comparte información y se intercambia se puede decir que existe comunidad. Una comunidad virtual aparece cuando una comunidad real usa la telemática para mantener y ampliar la comunicación. El hecho de que la interacción entre las personas se pueda realizar entre personas físicamente distantes pero enlazadas mediante redes telemáticas es lo que lleva a hablar de comunidades virtuales. De un modo más preciso Iparraguirre (1998) define una comunidad virtual como,

- - un grupo humano que comparte una serie de inquietudes o intereses;
- - vía telemática, es decir, salvando los límites espaciales y temporales;
- - tienen la posibilidad de interactuar de todos hacia todos.

Los servicios que puede prestar la constitución de una comunidad virtual son:

- Compartir cuestiones, problemas e inquietudes;
- Compartir medios (bibliografía, datos experimentales, etc.)
- Trabajar conjuntamente sobre un tema específico.

En España la RedIris del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC) está ofreciendo un soporte técnico para la creación y funcionamiento de comunidades virtuales de usuarios (CVU), también denominadas *redes temáticas* (Sanz de las Heras, 2000). Este servicio define genéricamente una CVU como un colectivo de usuarios de la Red que comparten un mismo perfil académico o científico. Los miembros de una CVU no pertenecen a ninguna organización específica sino que se encuentran dispersos entre muchas de ellas y, por lo tanto, no pueden ser coordinados por los servicios de las respectivas organizaciones más enfocados a ofrecer apoyo interno. La RedIris ofrece este nuevo servicio aportando un conjunto de herramientas integradas para el trabajo cooperativo en grupos de interés organizados. Se trata de ayudar a la creación y organización de estas CVU, aunque siendo sólo responsable del correcto funcionamiento de la parte técnica de los servicios. Sanz de las Heras (2000) describe los objetivos específicos de las Redes Temáticas (o CVU) del siguiente modo:

1) Concentrar recursos y contenidos (publicaciones, proyectos de investigación, etc.)
2) Crear mecanismos y flujos de cooperación entre los colectivos académico-científicos de ámbito nacional e internacional, con especial hincapié en Iberoamérica y Europa.
3) Fomentar la creación de vínculos con los colectivos no pertenecientes a la Comunidad RedIris (sociedades científicas y/o multidisciplinares, fundaciones, agrupaciones, foros especializados, etc.)
4) Disponer de una plataforma *horizontal* donde pueda encajar cualquier iniciativa relacionada con la temática.

Ejemplo de CVU: Tecnología Educativa

Un ejemplo en pleno desarrollo de CVU, constituida en el seno de la RedIris, es la del área temática de Tecnología Educativa, la cual pretende servir de plataforma para potenciar el conocimiento y el uso de las nuevas tecnologías en el ámbito educativo mediante la distribución de materiales periódicos relacionados con la temática, proporcionar un canal de difusión de actividades, experiencias relacionadas y la puesta a disposición del colectivo de recursos educativos.

Concretamente pretende ser un espacio donde los profesionales de este ámbito compartan, intercambien y promuevan proyectos relacionados con la explotación de las posibilidades educativas de las tecnologías de la comunicación, mediante:

- El debate académico en el ámbito iberoamericano respecto a las tecnologías de la comunicación aplicadas a la educación.

- El intercambio de experiencias referidas al diseño, producción, uso y evaluación de nuevos medios didácticos.
- La organización de debates telemáticos, y otras actividades apoyadas en las posibilidades comunicativas de las redes.
- La experimentación de herramientas de aprendizaje colaborativo.
- Experimentación y evaluación de Web tools, etc...
- Promover proyectos de innovación por parte de grupos de profesores del colectivo, etc...

En los diferentes espacios de la Comunidad Virtual de Tecnología Educativa, encontramos recursos variados: Foros de discusión; páginas webs; revistas electrónicas; documentos; zona de trabajo común; chat; tablón de anuncios.

En la siguiente sección estudiaremos estos recursos actualmente en funcionamiento, aunque de manera dispersa y descoordinada, en la comunidad de educación matemática iberoamericana. Estudiaremos también las posibilidades y estrategia para la constitución de una CVU o red temática de educación matemática bajo el soporte técnico de la RedIris del CSIC.

3. PROYECTO DE CREACIÓN DE CIVEM

La tecnología básica en la que se basan las comunidades virtuales está formada por el correo electrónico y los programas de gestión de listas de distribución, el almacenamiento de información en páginas web, la transferencia de ficheros vía ftp, programas para textoconferencias (chats) y videoconferencias, y programas como BSCW que permiten crear áreas de trabajo común. Estos recursos son ofrecidos y gestionados por la infraestructura de la RedIris.

3.1. Foros de discusión

Los foros de discusión basados en el uso de listas de distribución tienen unas características específicas y diferentes respecto a los foros presenciales que tienen lugar en un recinto y en un lapso de tiempo breve. Aunque el uso más frecuente de los foros consiste en la demanda y el ofrecimiento de informaciones sobre el área de interés común (en nuestro caso la educación matemática) referidas a bibliografía, celebración de congresos, etc., también se pueden plantear temas de discusión apoyados por la lectura de documentos que se ponen a disposición de los miembros del foro. En este caso, las diversas propuestas e intervenciones quedan almacenadas y directamente accesibles a los miembros, por lo que los temas posibles quedan abiertos por un tiempo indefinido. Además no hay una estructura jerárquica en el foro, por lo que las intervenciones se pueden producir entre cada miembro y los restantes en un plano de igualdad.

En la actualidad existen dos foros de discusión sobre educación matemática, bajo el soporte de RedIris, que pueden ser uno de los puntos de partida para la constitución de la Comunidad Iberoamericana Virtual de Educación Matemática (CIVEM). A continuación describimos brevemente los objetivos de dichos foros. En ambos hay que destacar el alto porcentaje de personas suscritas pertenecientes a países americanos.

3.1.1. EDUMAT

EDUMAT es una lista de distribución de correo electrónico dirigida a los profesionales de la enseñanza de las matemáticas de todos los niveles educativos (Infantil, Primaria, Secundaria, Universidad...). Surgió a iniciativa personal de uno de los coautores de esta ponencia, en el marco del Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de les Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, el 10 de noviembre de 1998.

Algunos objetivos de EDUMAT en relación con la educación matemática son:

1) Servir de foro de debate y colaboración de los enseñantes de las matemáticas en torno a las ideas y planteamientos sobre la educación matemática.
2) Ser un centro difusor de informaciones de carácter general y específico sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (congresos, conferencias, seminarios, jornadas, publicaciones en papel o electrónicas, ...).
3) Ser un lugar de discusión sobre trabajos de investigación en didáctica de las matemáticas.
4) Ser un centro de intercambio de experiencias e innovaciones educativas en el campo de las matemáticas, prestando un especial interés a la introducción de la informática e Internet en el aula de matemáticas.
5) Ser, en resumidas cuentas, un espacio abierto de comunicación entre todas las personas interesadas en la continua mejora y progreso de la

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos.

Cualquier tema relacionado con la educación matemática tiene cabida en EDUMAT. La matemática recreativa, la historia de la matemáticas y su uso en la enseñanza, la filosofía de las matemáticas y de la educación matemática, la popularización y divulgación de las matemáticas, la etnomatemática, ... tienen también su sitio en EDUMAT.

El ámbito de la lista es internacional y la lengua preferente el castellano y cualquier otro idioma latino (catalán, gallego, portugués, italiano y francés). Se aceptan sin problemas textos escritos en euskera e inglés, siempre que vayan acompañadas de su correspondiente traducción. La subscripción a la lista es abierta, no hay ningún cuestionario previo, por lo que no se puede hablar con precisión respecto de los componentes de la lista en cuanto a titulaciones profesionales, ejercicio de la profesión, nivel educativo, experiencia docente, etc.,

Para contactar con Edumat puede hacerse a través de dos vías, la de la página web en RedIris: http://www.rediris.es/list/info/edumat.html, y en la propia de Edumat alojada en la Universidad de Barcelona, que sirve como anteproyecto a la futura Comunidad Virtual en Educación Matemática: http://www.ub.es/edumat/

Uno de los activos más importantes de Edumat es el carácter internacional de la lista. El número de subscriptores a la lista el 23 de junio del 2000 es de 387, y la distribución de los suscriptores por países es la siguiente:

Argentina	50	*Bolivia*	2
Brasil	1	*Chile*	12
Colombia	3	*Cuba*	3
España	223	*Finlandia*	1
Holanda	1	*Honduras*	1
México	2	*Perú*	4
Suecia	1	*USA*	2
Uruguay	3	*Venezuela*	3
Dominio genérico (com, net, org...)			75

3.1.2. INDIMAT

La Junta Directiva de la SEIEM tomó la iniciativa de crear un Foro de Discusión en Internet con el nombre de INDIMAT (Investigación en Didáctica de la Matemática), bajo el soporte técnico de la RedIris del CSIC. Se trata de un foro que complementa al Foro EDUMAT, que viene funcionando desde Noviembre de 1998 en la RedIris, centrándose de manera más específica en los temas de investigación en Didáctica de la Matemática.

El Foro INDIMAT fue puesto en funcionamiento el día 4 de Abril del 2000. Está dirigido de manera abierta a todos los investigadores en Didáctica de las Matemáticas y áreas afines que estén interesados en:

1) Identificar y compartir documentos relevantes sobre los fundamentos teóricos y metodológicos de la Didáctica de la Matemática, teniendo en cuenta las distintas aportaciones de otras disciplinas relacionadas.
2) Conocer y analizar diversos enfoques de investigación en didáctica de las matemáticas, contrastando las diversas nociones teóricas y opciones metodológicas que se proponen, así como sus implicaciones para la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
3) Favorecer activamente la cooperación e intercambio entre investigación y docencia en todos los niveles educativos.
4) Facilitar la discusión y difusión de los trabajos y proyectos que se elaboren por los miembros suscritos al Foro entre la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas.

La suscripción a la lista y el envío de contribuciones se puede iniciar desde la propia página web de la SEIEM: http://www.ugr.es/local/seiem/, y desde la página web de Indimat alojada en RedIris: http://www.rediris.es/list/info/INDIMAT.html

En el caso de la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas agrupada entorno de la SEIEM se ha optado, como uno de los medios de acción más importantes, la celebración de Simposios anuales. Pero el oficio de científico hace ya tiempo que ha sido modificado por la disponibilidad de las redes telemáticas. Como afirma Echeverría (1999), “los científicos no requieren tanto verse las caras como ver sus respectivos esquemas, fórmulas, simulaciones, datos y borradores" (p. 256). El telediálogo que se puede mantener antes y después de los simposios será más rico y profundo que las intervenciones improvisadas y espontáneas que se producen tras la presentación oral de una ponencia. El foro INDIMAT, apoyado en la lectura compartida de documentos puestos a disposición de los participantes en la red puede hacer posible y estimular la discusión antes, y también después, de la celebración de los seminarios presenciales. Además, la implementación del foro mediante listas de distribución hace posible la participación a escala internacional.

El número de subscriptores a INDIMAT el 5 de Julio del 2000 es de

107, distribuido entre 12 países del siguiente modo:

Argentina	24	*Bolivia*	2
Brasil	1	*Chile*	1
Colombia	5	*Cuba*	1
España	56	*Francia*	3
México	1	*Uruguay*	1
USA	1		
Dominio genérico (com, net, org…)			11

3.2. Sociedades y grupos promotores de *CIVEM*

Consideramos que el proyecto de creación de CIVEM debería estar basado en las comunidades reales existentes, procurando que no sea una iniciativa aislada de una o dos personas. En España contamos con la existencia de la SEIEM, cuya Junta Directiva, en su reunión de 9-6-2000 ha mostrado un gran interés en este proyecto estando dispuesta a impulsarlo convocando una reunión con la Junta Directiva de la FESPM (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas).

Otras sociedades y comités que pueden ser invitados a participar en la promoción de la red temática son,

- APM (Sociedad Portuguesa de Profesores de Matemáticas), en cuyo seno hay constituido un grupo de investigación en didáctica de las matemáticas.
- CIAEM: Comité Interamericano de Educación Matemática, organización regional latinoamericana afiliada al ICMI, promotor, junto con APM y FESPM, de los CIBEM (Congreso Iberoamericano de Educación Matemática)

Hay que destacar, que además de los congresos, reuniones y simposios promovidos por estas sociedades se están editando diversas revistas (Suma, Quadrante, Epsilon, Números, Educación y Matemática, etc.).

La CIVEM estaría gestionada por un Comité de Administradores, nombrados por las distintas sociedades promotoras, y contaría con un sitio web alojado en RedIris que podría funcionar como el portal de entrada a los recursos telemáticos disponibles sobre educación matemática en el ámbito iberoamericano.

3.3. Otros recursos ofrecidos por RedIris

Además de espacio para alojar una página web de la comunidad virtual de usuarios, y la gestión de listas de distribución, se tiene la posibilidad de alojar documentos recuperables por las personas suscritas a los foros. También se pueden crear Zonas de Trabajo compartidas basadas en el uso del programa BSCW, celebración de texto, audio o videoconferencias y tablones de anuncios.

El programa BSCW es una aplicación pensada para el desarrollo de documentos de un modo distribuido, basado en el uso del correo electrónico y de un navegador (Castillo, 1999). Proporciona un mecanismo de control de versión de los distintos documentos que permite saber para cada versión quién la ha realizado, cuándo y sobre qué documento. También permite la gestión de convocatorias de reunión presenciales o virtuales.

Una vez constituido una comunidad virtual en RedIris se tiene acceso al servicio de salas de texto-conferencias. Este servicio pretende cubrir las necesidades de reuniones síncronas en los grupos de la comunidad, usando una aplicación sencilla y de bajos requerimientos de recursos, como es la textoconferencia. Para cada sala se nombra un administrador que será el responsable de la admisión de altas y bajas. Las convocatorias se pueden hacer desde BSCW, lo que comporta varias ventajas. La descripción de este servicio se encuentra en http://www.rediris.es/cvu/serv/chat

La aplicación del *tablón de anuncios* pretende, con la colaboración de todos los miembros, que las personas de la comunidad estén al día de cualquier tema relativo a los objetivos: anuncios de congresos y demás eventos que se vayan convocando; comentarios, sugerencias de vínculos a otros sitios que se considere de interés, etc.

4. OBSERVACIONES FINALES

La comunidad real de educación matemática (profesores de matemáticas e investigadores en didáctica de la matemática) es en la actualidad una comunidad muy numerosa pero escindida y desconectada. Esta situación puede ser natural en un momento histórico determinado pero pensamos que es posible y necesario establecer vínculos y programas de actuación conjunta entre los diversos colectivos. La creación de un portal en Internet, bajo la infraestructura de la RedIris del CSIC, en el que se enlacen las diversas webs de sociedades y grupos, se gestionen coordinadamente los foros de discusión EDUMAT e INDIMAT, se cree un espacio de colaboración para la edición de revistas electrónicas y la realización proyectos de actuación conjunta puede ser un instrumento de extraordinario interés para la mejora de la educación matemática en el ámbito iberoamericano.

El carácter distal y reticular del espacio cibernético, o tercer entorno (Echeverría, 1999), hace posible que un proyecto de investigación o una experiencia de innovación se pueda realizar por personas situadas en distintos países y perteneciendo a distintas organizaciones. La red ofrece medios técnicos para ese tipo de trabajo cooperativo.

Debemos ser conscientes, no obstante, que el uso de estos medios técnicos no es inmediato, esto es, requiere un mínimo de conocimientos y destrezas. Se puede hablar de la necesidad de promover una cierta "alfabetización" por parte de las comunidades reales que pretendan realizar su transformación a una comunidad virtual. ¿Cómo se pueden detectar las necesidades de alfabetización en este campo? ¿Puede haber un fenómeno de retraimiento por parte de aquellas personas que tienen dificultades en la adquisición de las nuevas destrezas requeridas y que no saben, o tienen reparo, en pedir ayuda?

REFERENCIAS

Castillo, J.:1999, 'Aplicación de herramientas groupware a través de Internet: BSCW. Su utilidad en las comunidades virtuales de usuarios'. URL, http://www.rediris.es/cvu/publ/bscw99.html

Echeverría, J.: 1999, *Los señores del aire: Telépolis y el tercer entorno*. Barcelona: Destino.

Iparraguirre, J.: 1998, 'El taller de comunidades virtuales a 5/3/1998'. Maig 98. http://www.gpd.org/maig98/es/comvirture.htm

Sanz de las Heras, J. :2000, '¿Qué son redes temáticas? Servicio de RedIris para la construcción de Redes Temáticas'. (Comunicación personal, 14 Abril 2000, versión 1.0; jesus.heras@rediris.es)

15

GÉNESIS DE UN TEMA DE INVESTIGACIÓN: PAPEL DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS[1]

Juan D. GODINO, Universidad de Granada (España)

Mario ARRIECHE, Univ Pedagógica Experimental Libertador (Venezuela)

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar algunos criterios para generar problemas de investigación en didáctica de la matemática, dentro de un marco teórico que se describe como "enfoque semiótico-antropológico". Estos criterios se aplican y ejemplifican sobre el tema de la introducción de la teoría de conjuntos en el currículo de matemáticas de magisterio.

1. ASPECTOS Y DIMENSIONES DE UN PROBLEMA DIDÁCTICO-MATEMÁTICO

En este trabajo describimos el origen, evolución y perspectivas de futuro de un tema de investigación iniciado en 1998 en el programa de doctorado de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada, sobre "el papel de la teoría de conjuntos (TC) en la formación de maestros". Pensamos que esta información puede ser útil para los estudiantes que inician sus estudios de tercer ciclo, ya que el objetivo principal pretendido por un programa de doctorado es capacitar a los estudiantes para el planteamiento y resolución de un problema de investigación. Nos proponemos, asimismo, mostrar la dialéctica existente entre los aspectos prácticos, tecnológicos y científicos en la investigación didáctica, así como las tres dimensiones básicas involucradas en un problema de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: las dimensiones epistemológica, cognitiva e instruccional. Conviene advertir, no obstante,

1 En P. Gómez y L Rico (Eds.). *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* (pp.245-256). Granada: Universidad de Granada.

que los aspectos del problema que se describen no se proponen como un proyecto de tesis particular, sino mas bien como un *tema de estudio* que puede dar lugar a diversas investigaciones específicas.

La pregunta inicial que motivó la investigación fue, *¿cuál es el papel que debería desempeñar el estudio de los conjuntos, aplicaciones y relaciones en la formación de los maestros?* Esta pregunta tenía interés tanto para el tutor como para el doctorando. El tutor imparte un curso de "matemáticas y su didáctica" para los maestros de educación primaria y necesita tomar una decisión fundamentada sobre el tema de los conjuntos, planteándose cuestiones como las siguientes: ¿Es útil el lenguaje conjuntista para desarrollar los restantes temas del programa? ¿Qué dificultades plantea el tema a los estudiantes? ¿En qué medida se debería estudiar? ¿Interesa incluir un tema introductorio en el programa sobre conjuntos, relaciones y aplicaciones, o por el contrario, dichos contenidos pueden y deben ser tratados de manera implícita y a medida que se usan? ¿Qué materiales utilizar en el estudio del tema?.

El doctorando tiene una amplia experiencia en la impartición de cursos sobre álgebra abstracta (en particular el álgebra de Boole de conjuntos) para la formación de profesores de matemáticas (nivel de secundaria y universidad), de modo que está familiarizado con el tema y la problemática educativa que plantea, aunque el nivel de los profesores de matemáticas de secundaria introduce un factor diferenciador respecto de los profesores de primaria.

Vemos que inicialmente el problema tiene un interés que podemos calificar de *práctico* para un profesor: ¿qué contenidos matemáticos debo enseñar a mis alumnos y cómo enseñarlos? La respuesta esperada es prescriptiva, y en cierto modo imperiosa, ya que el profesor tiene que tomar la decisión de qué hacer en un plazo de tiempo relativamente corto (cada mes de septiembre cuando se programa el desarrollo del nuevo curso).

Puesto que en los últimos diseños curriculares se han suprimido las nociones conjuntistas de la educación primaria, estamos tentados a responder que el papel de la teoría de conjuntos en la formación de los maestros debe ser nulo, dado que no tienen que enseñar esos contenidos. Esto implica que podemos prescindir del lenguaje de los conjuntos, aplicaciones y relaciones cuando los maestros estudien los sistemas numéricos, la geometría y las magnitudes. Pero nos queda la duda si con esa opción drástica creamos una barrera para que los maestros puedan ampliar sus conocimientos matemáticos sobre temas algo más avanzados que los que se supone tendrán que enseñar en el ejercicio de su profesión, y que requieren de los conjuntos para ser estudiados de una manera apropiada. También es posible que perdamos la oportunidad de ofrecer una presentación estructurada de los restantes contenidos del programa. Parece, pues que la respuesta de supresión se basa mas bien en meras opiniones, o en actitudes ideológicas. Para tomar una decisión fundada es necesario disponer de información que no está directamente accesible y, por tanto, requiere investigación.

Esa información debe permitir responder con fundamento a preguntas más específicas que podemos clasificar según tres dimensiones o categorías:

1) ¿Qué es la "teoría de los conjuntos"? ¿Qué formulaciones se han hecho de dicha teoría matemática en distintos períodos y circunstancias? ¿Qué papel desempeña en la matemática? ¿Qué papel puede desempeñar en las matemáticas escolares? (*problemática epistémica*, esto es, relativa al conocimiento matemático).
2) ¿Qué dificultades de comprensión tienen los distintos contenidos que configuran la TC para los futuros maestros? ¿Cuáles son los motivos de tales dificultades? (*problemática cognitiva*).
3) ¿Cómo se enseña la teoría de conjuntos en el nivel y contexto institucional fijado? ¿Qué factores instruccionales condicionan, y cómo, el aprendizaje de los estudiantes de la TC? ¿Qué patrones de interacción profesor- alumno son óptimos para facilitar el aprendizaje de la TC? (*problemática instruccional*, esto es, relativa a la enseñanza y al aprendizaje).

Vemos, por tanto, cómo el problema inicial se descompone en subproblemas cuando comenzamos a pensar en él. Estas cuestiones tienen ya una naturaleza diferente: se trata de describir, identificar factores condicionantes, explicar, esto es, una naturaleza de tipo científico (descriptivo-explicativo). Estas cuestiones deben ser abordadas con herramientas conceptuales propias de la didáctica de las matemática, o de disciplinas relacionadas, como la epistemología, la psicología y la didáctica general. Aparece, por tanto, el problema de la selección de los marcos teóricos y metodológicos desde los cuales abordar las distintas facetas de la didáctica de un contenido matemático.

En las siguientes secciones describiremos diversas cuestiones específicas de investigación para cada una de las tres dimensiones mencionadas. Pero antes presentaremos brevemente las nociones teóricas que usaremos en su formulación, desarrolladas en el marco teórico en el que venimos trabajando y que designamos como semiótico-antropológico

(Godino y Batanero, 1997).

2. ALGUNAS NOCIONES Y SUPUESTOS TEÓRICOS

Entre las nociones básicas que proponemos para el análisis didáctico están las de "significado institucional y personal de un objeto matemático" (Godino y Batanero, 1994). Tales significados se conciben como los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) realizadas por una persona (o en el seno de una institución) para resolver un campo de problemas matemáticos. Los sistemas de prácticas reconocidos como apropiados para resolver un tipo de tareas en el seno de una institución son descritos por Chevallard, Bosch y Gascón (1997) como una *praxeología matemática*, noción que coincide con lo que nosotros hemos denominado "significado institucional de un objeto matemático". La adopción de las praxeologías como significados de los objetos matemáticos (teorías, contenidos u organizaciones matemáticas) supone la adopción de una epistemología de tipo pragmatista y relativista (en consonancia con la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein). Estas entidades se conciben como sistemas formados por distintos elementos agrupables en dos categorías:

a) Dimensión praxémica (praxis), formada por el campo de problemas, los registros semióticos (notaciones) y las técnicas (operaciones, procedimientos) puestos en juego;

b) Dimensión discursiva (logos), formada por los conceptos, propiedades y argumentaciones que regulan, organizan y estructuran los componentes praxémicos.

La noción de praxeología nos proporciona una herramienta potente para analizar la variedad de significados atribuidos a la expresión "teoría de conjuntos". Para seleccionar los aspectos de la teoría de conjuntos viables en un nivel y contexto educativo es necesario disponer de las diversas posibilidades e identificar sus elementos constituyentes.

Por otra parte, para describir y explicar los logros y dificultades de los estudiantes tenemos que analizar con suficiente detalle el proceso de estudio, los patrones de interacción docente-discente a lo largo del proceso, así como la trama compleja de objetos y relaciones que constituyen el conocimiento pretendido. Con dicho fin las nociones de "praxeología didáctica" y "función semiótica" pueden ser herramientas conceptuales útiles.

La noción de *praxeología didáctica* (Chevallard, 1997) se corresponde con la de praxeología matemática, pero en este caso el componente praxémico se refiere a las tareas del profesor y del alumno, las técnicas de estudio, y de ayuda al estudio. Para el profesor, en el momento de la planificación de la enseñanza, se trata de diseñar una praxeología matemática viable y en el momento de realización de la instrucción se trata de decidir y aplicar las técnicas de ayuda al estudio mejor adaptadas.

Un aspecto integrante de la praxeología didáctica es la distribución en el tiempo de las diversas funciones docentes y discentes en conjunción con los distintos componentes de las praxeologías matemáticas. Se necesita describir el *diálogo* efectivamente ocurrido entre profesor y estudiante a propósito de cada componente del saber matemático, o prever posibles alternativas para tales diálogos e interacciones. Los distintos elementos que componen la praxeología matemática escolar deberán ser abordados por el docente y discente de acuerdo con patrones de interacción definidos distribuidos en el tiempo, lo que constituye una *trayectoria didáctica*.

Finalmente, la noción de *función semiótica* pretende tener en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de la actividad matemática y de los procesos de difusión del conocimiento matemático. Se dice que se establece una función semiótica entre dos entidades (ostensivas o no ostensivas) cuando entre ambas se establece una dependencia representacional o instrumental, esto es, una de ellas se "pone en lugar de la otra", o una de ellas "es usada por la otra". Esta noción permite formular en términos semióticos, y de una manera general y flexible el conocimiento matemático (Godino, 1999a).

Utilizando estas nociones podemos formular una agenda de investigación sobre el papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros del modo que describimos en la siguiente sección.

3. AGENDA DE INVESTIGACIÓN SOBRE EL PAPEL DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS

3.1. Dimensión epistemológica

Dentro de la faceta epistemológica debemos interrogarnos sobre qué significados particulares se atribuyen a los contenidos de teoría de conjuntos que se estudian actualmente en el nivel y contexto educativo que nos interesa. Bajo la etiqueta "contenido" debemos incluir, las situaciones-problemas que motivan el estudio del tema, las notaciones, definiciones, operaciones, propiedades y tipos de justificaciones que se aportan. A este sistema de elementos o prácticas operativas y discursivas es lo que denominamos "praxeología conjuntista", o significado de la "teoría de conjuntos" en el contexto institucional fijado.

Pero el estudio descriptivo de las praxeologías efectivamente implementadas y de sus consecuencias cognitivas en un contexto debe ser complementado. Nos parece necesario preguntarnos: ¿Qué otras praxeologías conjuntistas podrían ser viables? ¿Qué criterios se deberían seguir en la elaboración de praxeologías viables y óptimas en el nivel y contexto que nos interesa?.

Estas preguntas son las que llevan a investigar el origen y el papel de la teoría de conjuntos en la matemática, y en distintos contextos institucionales, en particular a estudiar el fenómeno de la "matemática moderna" en las décadas de los 60, 70 y parte de los 80. Mediante este estudio epistemológico obtendremos los elementos característicos de las diversas praxeologías conjuntistas y criterios para valorar su posible viabilidad en un contexto educativo. Se trata de una especie de “arqueología del conocimiento matemático” orientada a la búsqueda de criterios para la construcción e implementación de praxeologías conjuntistas en el contexto que nos interesa.

El estudio de las diversas teorías de conjuntos que se han ido formulando previamente es necesario para superar la creencia de que bajo la expresión "teoría de conjuntos" hay algo único y bien delimitado que es lo que se debería estudiar en la escuela. La noción de praxeología (conjuntista) puede ayudar a superar esta creencia al mostrar la variedad de tales significados institucionales en distintos autores y momentos históricos, sus características, relaciones mutuas y evolución. Este estudio debe aportar criterios de elaboración de praxeologías conjuntistas viables y útiles en los currículos escolares.

Parece claro que las teorías axiomáticas de conjuntos responden a una problemática de fundamentación de la matemática que es completamente ajena e incomprensible a la gran mayoría de los estudiantes (con excepción posiblemente de los que siguen una licenciatura de matemáticas). Pero los rudimentos del lenguaje conjuntista sí parece que puede ser útil como elemento unificador de los distintos contenidos del programa.

En el caso que nos ocupa consideramos necesario analizar los siguientes contextos institucionales:

- La obra de los matemáticos precursores de la teoría de conjuntos (Riemann, Dedekind y Cantor).

- El período de las paradojas y la axiomatización consiguiente; la teoría de conjuntos consolidada como fundamento de las matemáticas y como rama o campo de investigación matemática (teoría abstracta de conjuntos).
- Los conjuntos en la matemática intuicionista; el constructivismo matemático (Kronecker, Poincaré, Brower, ...)
- La reforma educativa de la matemática moderna.

Para cada uno de estos contextos histórico- institucionales debemos caracterizar los distintos elementos que componen las praxeologías correspondientes, esto es, los tipos de problemas que se trataban de resolver, las operaciones y conceptos formulados, notaciones, propiedades y modos de argumentación específicos usados. Consideramos que este estudio nos aportará elementos claves para explicar el fenómeno del fracaso de la matemática moderna e identificar los criterios para proponer adaptaciones curriculares viables sobre este tema.

A título de ejemplo, el análisis de la noción de *variedad* desarrollada por Riemann y el uso que hizo de ella como fundamento de sus investigaciones matemáticas nos parece necesario como precedente de la noción de conjunto que fue delimitándose en los trabajos de Dedekind y Cantor. Asimismo, el uso que hizo Dedekind de los conjuntos y aplicaciones en sus investigaciones sobre los fundamentos de los números, el álgebra y la geometría nos parece que puede aportar criterios para el diseño de praxeologías conjuntistas en el nivel educativo que nos interesa. Por otra parte, también parece necesario caracterizar las praxeologías conjuntistas elaboradas desde el enfoque constructivista (Weyl, Brower), ya que pueden aportar elementos para definir una propuesta viable alternativa al enfoque logicista dominante. El reciente libro de Ferreirós (1999) es una referencia importante para este estudio epistemológico.

3.2. Dimensión instruccional: Enseñanza y aprendizaje

Una vez definida una praxeología matemática escolar, a partir del estudio de la dimensión epistemológica del tema, se trata de entrar en la investigación experimental de su viabilidad y en la determinación de las condiciones óptimas de implementación. Esta faceta del tema de investigación se puede describir mediante las nociones teóricas de *praxeología didáctica* (Chevallard, 1997) y *trayectoria didáctica* (Godino, 1999b).

Fijada una praxeología conjuntista el profesor planifica e implementa una secuencia de tareas docentes y discentes para los distintos elementos de la praxeología, justificando tal organización en su propia experiencia, en supuestos pedagógicos y resultados de investigaciones didácticas precedentes. Con estas nociones se puede describir la dimensión instruccional de la problemática didáctica del modo siguiente:

- Identificación de criterios de elaboración de praxeologías didácticas relativas a las distintas praxeologías conjuntistas plausibles.
- Identificación de criterios de implementación de trayectorias didácticas viables y óptimas relativas a una praxeología didáctica específica. La optimalidad se supone que puede evaluarse en términos de la calidad de los diálogos docente-discente que permitan resolver los conflictos cognitivos que puedan surgir.

A título de ejemplo, hemos encontrado una investigación (Baxter, 1993) que se refiere concretamente a la enseñanza de nociones conjuntistas apoyada en el uso del lenguaje de programación ISETL.

3.3. Dimensión cognitiva: Comprensión de elementos de las praxeologías conjuntistas

La dimensión cognitiva de una problemática didáctica se refiere a la caracterización de los significados personales de los sujetos sobre los distintos elementos de una praxeología matemática (Godino y Batanero, 1994). Esto supone determinar los tipos de problemas conjuntistas que son capaces de resolver, el grado de dominio que han logrado en el uso de las notaciones, definiciones, operaciones, propiedades y modos de argumentación. Se trata, asimismo, de identificar los aspectos críticos de las praxeologías matemáticas que plantean conflictos cognitivos a los estudiantes y que, por tanto, requieren una atención especial en el proceso de estudio.

La faceta o dimensión cognitiva es dependiente de la epistemológica e instruccional. Esto quiere decir que las afirmaciones que hagamos sobre conflictos cognitivos deben ser referidas a las características de las praxeologías matemáticas correspondientes, y también, de las praxeologías didácticas implementadas. Cambios en tales dimensiones pueden llevar a la supresión o modificación de tales conflictos.

En el caso de las nociones conjuntistas se han realizado diversas investigaciones para caracterizar las dificultades de estudiantes de magisterio en relación a dichas nociones. En particular hemos encontrado los trabajos de Linchevski y Vinner (1988), Zaskis y Gunn (1997), y Fischbein y Baltsan (1999).

Linchevski y Vinner (1988) estudiaron cuatro aspectos del concepto de conjunto en 309 maestros y estudiantes para maestros, que consisten en: a) el conjunto como una colección arbitraria de objetos, b) la colección formada por un objeto como un conjunto, c) el conjunto como elemento de otro conjunto; y d) el orden de los elementos de un conjunto y el problema de los elementos repetidos.

Los resultados revelaron que el concepto ingenuo de conjunto en estos maestros, difiere del concepto matemático. La mayoría de estos sujetos creen que los elementos de un conjunto dado tienen una propiedad común, que un conjunto no puede ser elemento de otro conjunto y que los elementos repetidos de un conjunto deben contarse por separado. Además, casi la mitad de las personas rechazaron que la colección formada por un sólo objeto es un conjunto.

Zazkis y Gunn (1997) investigaron la comprensión de los conceptos básicos introductorios de la teoría de conjuntos: conjunto, elemento de un conjunto, cardinalidad, subconjunto, y el conjunto vacío, en un grupo de maestros en formación. Revelaron en sus resultados complejidades en la comprensión de los estudiantes, sobre todo cuando los elementos de un conjunto son a la vez conjuntos. Se prestó atención especial a la descripción de las dificultades mostradas por los estudiantes con el concepto del conjunto vacío.

Fischbein y Baltsan (1999), en una investigación realizada sobre "el concepto matemático de conjunto y el modelo colección", analizaron los diferentes conceptos erróneos sostenidos por los estudiantes con respecto al concepto matemático de conjunto, entre los que se encontraban un grupo de maestros en formación. En los resultados obtenidos se mostraron en los estudiantes las siguientes interpretaciones: a) un conjunto es una colección que tiene una propiedad común, b) los elementos de un conjunto son números, c) un conjunto debe poseer un número mínimo de elementos, d) no aceptaron la posibilidad de que un conjunto pueda consistir en un sólo elemento, e) no aceptan la existencia de un conjunto vacío, f) dos conjuntos son iguales si tienen el mismo número de elementos; y g) contaron separadamente los elementos repetidos en los conjuntos. La investigación de Fischbein se puede describir como el intento de explicar las dificultades mediante la relación entre la noción ordinaria de colección y la noción matemática de conjunto.

Las investigaciones descritas se limitan a describir o constatar que algunas nociones de la teoría de conjuntos presentan unos índices elevados de dificultad incluso en estudiantes universitarios, particularmente maestros en formación. Consideramos que las dificultades de las tareas pedidas pueden ser explicadas en términos de la complejidad semiótica de las mismas que habitualmente pasa desapercibida en los procesos de instrucción, así como de las relaciones entre distintos objetos que deben ser explícitamente reconocidas. La noción de *función semiótica* y la noción de conocimiento derivada de dicha noción, propuesta por Godino y Batanero (1998), puede ser un instrumento útil para explicar los conflictos cognitivos de los estudiantes en la apropiación de la praxeologías matemáticas. Esta afirmación requiere, no obstante, confirmación mediante investigaciones empíricas específicas.

4. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Desde el punto de vista metodológico, en estas investigaciones se combinan diversas técnicas y enfoques según las distintas facetas del estudio, dependiendo de la cuestión particular abordada en las mismas.

Así pues se combina el estudio documental en la faceta epistemológica de la investigación con diversas técnicas y enfoques en la parte instruccional y cognitiva. Las cuestiones relativas a la faceta instruccional se enfoca mediante el estudio de casos de experiencias de enseñanza diseñadas con criterios derivados del análisis epistémico y de los estudios cognitivos previos. Aquí los métodos etnográficos desempeñarán un papel relevante. En la investigación de la faceta cognitiva (significados personales de los estudiantes) se utilizará tanto el enfoque cuantitativo y experimental como el cualitativo- interpretativo. Dado que los métodos cuantitativos indican las tendencias existentes en la población, pero no muestra toda la riqueza de la variabilidad individual, ni explica el por qué de la misma, se deberá complementar el estudio mediante técnicas de tipo cualitativo. Particularmente, el estudio de casos mediante entrevista clínica va a permitir caracterizar con más rigor las dificultades, conflictos y grado de comprensión logrado por los estudiantes de la muestra.

Evidentemente, puesto que el estudio cualitativo se hace con muestras de tamaño reducido su carácter es exploratorio y están principalmente orientados a la formulación de hipótesis que deberán ser contrastadas formalmente en nuevas investigaciones.

5. OBSERVACIONES FINALES

En las secciones anteriores hemos mostrado una variedad de cuestiones sobre el tema elegido formuladas desde un marco teórico explícito. Hemos mostrado que un problema de investigación es esencialmente abierto, y con frecuencia, al menos en sus etapas iniciales, bastante difuso. En nuestro caso, en el momento actual, hemos cubierto una primera etapa centrada en la búsqueda de fuentes bibliográficas sobre las distintas dimensiones descritas, y terminado una primera fase exploratoria en la cual hemos observado un proceso instruccional y caracterizado los significados personales de los estudiantes sobre distintos aspectos del tema tratados en dicho proceso. Con este estudio realizado sobre una muestra de 122 estudiantes de magisterio hemos replicado algunos aspectos de los estudios cognitivos de autores como Linchevski y Vinner (1988), Zaskis y Gunn (1997) y Fischbein y Balsam (1999) y hemos ampliado a otros aspectos como el estudio de las dificultades de la noción de aplicación y relación, entre otros.

Este breve análisis pone de manifiesto que el tema inicial planteado, "el papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros", desborda las posibilidades de una tesis doctoral, cuando se afronta desde las exigencias de rigor y sistematicidad propias de la investigación científico-académica. Esto lleva a la necesidad de centrar el problema de tesis en un aspecto parcial, pero se debe vigilar que no se pierda de vista el objetivo inicial. El problema se puede desmenuzar de tal manera que se convierta en una trivialidad, visto desde el plano de la didáctica: la descomposición del problema en subproblemas puede llevar al olvido del problema sustantivo inicial y a perdernos en una maraña de cuestiones de escasa relevancia, o de interés para otras disciplinas distintas de la didáctica.

Si en este trabajo cambiamos la "teoría de conjuntos" por otro contenido matemático, una parte sustancial del mismo sigue siendo válida. Consideramos, por tanto, que hemos presentado los principales elementos de una agenda de investigación derivada del enfoque semiótico-antropológico. Esta agenda se centra, en consecuencia, en los siguientes aspectos mutuamente relacionados:

1) Caracterización de las distintas praxeologías asociadas a un contenido matemático e identificación de criterios de diseño de praxeologías matemáticas escolares (dimensión epistémica).

2) Caracterización de distintas praxeologías didácticas relativas a las praxeologías matemáticas escolares y la identificación de criterios de diseño y optimización de tales praxeologías (dimensión instruccional).
3) Caracterización de significados personales relativos a los distintos elementos de las praxeologías matemáticas escolares y su explicación en términos de las praxeologías matemáticas y didácticas (dimensión cognitiva).

La dimensión o faceta epistémica tiene un carácter primario, esto es, debe estudiarse en primer lugar, ya que sus resultados y conclusiones determinan las restantes facetas. Entre las facetas instruccional y cognitiva hay una dialéctica más compleja ya que, por una parte, los significados construidos por los estudiantes dependen del proceso de estudio seguido; pero este proceso debe tener en cuenta también los potenciales conflictos cognitivos identificados en investigaciones previas.

REFERENCIAS

Baxter, N. H. (1993). Understanding how students acquire concepts underlying sets. En J. J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning. Preliminary analyses and results* (pp. 99-106). Washington: The Mathematical Associaton of America.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17 (3): 17-54.

Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Horsori e ICE de la Universidad de Barcelona.

Ferreirós, J. (1999). *Labyrinth of thought : a history of set theory and its role in modern mathematics*. Boston : Birkhauser.

Fischbein, E. Y Baltsan, M. (1999). *The Mathematical concept of set and the collection model.* Educational Studies in Mathematics, 37: 1-22

Godino, J. D. (1999a). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas. *III Simposio de la SEIEM*.Valladolid. [Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino].

Godino, J. D. (1999b). Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática. *III Simposio de la SEIEM*, Valladolid. [Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino]

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1997). Una aproximación semiótica y antropológica a la investigación en educación matemática. [A semiotic and anthropological approach to research in mathematics education]. *Philosophy of Mathematics Education Journal*,10. [URL: http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome10/art7.htm]

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y prendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), Actas del IX *Seminário de Investigaçao em Educaçao Matemática (SIEM)*. Guimaraes: Associaçao de Professores de Matemática.

Linchevski, L. y Vinner, S. (1988). The naive concept of sets in elementary teachers. *Proceedings of the 12th International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Vol. 11, pp. 471-478. Vezprem, Hugary.

Zazkis, R. Y Gunn, Ch. (1997). Sets, subsets, and the empty set: Students' constructions and mathematical conventions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16 (1): 133-169.

16

LA FORMACIÓN MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA DE MAESTROS COMO CAMPO DE ACCIÓN E INVESTIGACIÓN PARA LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: EL PROYECTO EDUMAT-MAESTROS [1]

Juan D. GODINO

Resumen

La formación matemática y didáctica de los maestros requiere contemplar diversos tipos de conocimientos que están estrechamente relacionados entre sí. El formador de maestros debe dar respuestas a preguntas tales como, qué matemáticas enseñar, cómo enseñar dichas matemáticas, qué conocimientos didácticos precisa el futuro maestro, cómo enseñar tales conocimientos didácticos y qué tipo de conexiones se deben establecer entre los diversos conocimientos implicados.

En este trabajo vamos a analizar esta problemática y a presentar el proyecto Edumat-Maestros como una respuesta al reto de la formación matemática y didáctica de los estudiantes de magisterio. Se trata de un proyecto de I+D (investigación y desarrollo de recursos) en cuya primera fase nos proponemos redactar un "Manual de Matemáticas y su Didáctica para Maestros" que concrete nuestra respuesta a las cuestiones mencionadas, que pueda ser experimentado y permita avanzar en su mejora progresiva mediante la participación de la comunidad de formadores de maestros a través de Internet. Los documentos desarrollados hasta la fecha están disponibles en, http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/ *y las sugerencias y contribuciones se intercambian y discuten por medio del foro abierto en,* http://es.groups.com/group/edumat-maestros/

1 En C. Penalva, G. Torregrosa y Julia Valls (Eds.), *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 175-186). Alicante: Universidad de Alicante.

1. PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES

La formación matemática y didáctica de los futuros maestros en España es considerada muy deficiente por los diversos colectivos implicados en esta formación. Entre las causas hay que destacar las graves limitaciones del actual plan de estudios, señaladas por Rico (2000), quien denuncia el panorama desolador que se percibe en la formación matemática de los futuros maestros, "lo cual hace inteligible la preocupación social que se viene manifestando sobre la degradación de la enseñanza de las matemáticas en primaria, una de cuyas causas principales es la escasa y deficiente preparación de su profesorado" (p. 50).

Aparte de estas graves deficiencias estructurales, debemos reconocer la escasez de trabajos de investigación y desarrollo centrados en el diseño y experimentación de materiales para la formación matemática y didáctica de los maestros. Aunque se han hecho importantes esfuerzos editoriales para la redacción de textos de consulta para profesores y formadores de profesores sobre diversos contenidos de educación matemática, como la colección editada por Rico, Fortuny y Puig (1987-90), existen carencias importantes de textos para la formación de maestros que cubran los diversos contenidos matemáticos y didácticos requeridos. Un primer paso para cubrir esta laguna es el reciente libro editado por Castro (2001).

El Proyecto Edumat-Maestros se enmarca dentro de una línea de reflexión e investigación que tiene ya una cierta relevancia a nivel internacional como se muestra en los trabajos de síntesis incluidos en los "manuales de investigación" de educación matemática (Bishop y cols, 1996; Lin y Cooney, 2001). También a nivel nacional se han realizado contribuciones relevantes que van configurando una línea de investigación consistente (Gimenez, Llinares y Sánchez, 1996; Carrillo y Climent, 1999). Estos trabajos, suelen estar centrados en aspectos puntuales de la formación de maestros (creencias, concepciones sobre la matemática, su enseñanza, o sobre contenidos específicos), o bien reflexiones de carácter general sobre aspectos cognitivos o pedagógicos.

En nuestro caso centramos nuestra atención en la dimensión epistemológica (conocimientos matemáticos y didácticos) e instruccional (tareas y patrones de interacción docente-discente apoyados en el uso de Internet). Otro rasgo característico de nuestro proyecto es su naturaleza curricular y holística, en el sentido de que nos proponemos desarrollar y experimentar documentos que abarquen la globalidad de contenidos matemáticos y didácticos que consideramos pertinentes para el ejercicio competente de la profesión de maestro en el área de matemáticas. También nos proponemos crear una infraestructura, apoyada en el uso de Internet, que permita el progresivo enriquecimiento de los documentos producidos y su distribución entre la comunidad de formadores de maestros, al tiempo que los módulos de estudio previstos incorporen los recursos interactivos que ofrecen las nuevas tecnologías de información y las comunicaciones.

2. SUPUESTOS EPISTEMOLÓGICOS, COGNITIVOS E INSTRUCCIONALES DE NUESTRA PROPUESTA CURRICULAR

En este proyecto nos proponemos aplicar nuestra concepción de las matemáticas y de la didáctica de las matemáticas, que hemos desarrollado en diversos trabajos sobre fundamentación del campo de la educación matemática (Godino 2002a) y sobre el significado y comprensión de las matemáticas (Godino, 2002b). En esta sección incluimos una síntesis de los supuestos epistemológicos, cognitivos e instruccionales que orientan nuestra propuesta curricular.

Las matemáticas como quehacer humano, lenguaje simbólico y sistema conceptual

En primer lugar consideramos necesario distinguir en las matemáticas al menos cuatro aspectos esenciales mutuamente imbricados, que deben ser tenidos en cuenta en la organización de su enseñanza:

a) Las matemáticas constituyen una actividad de resolución de situaciones problemáticas de una cierta índole, socialmente compartida; estas situaciones problemáticas se pueden referir al mundo natural y social o bien pueden ser internas a la propia matemática; como respuesta o solución a estos problemas externos o internos surgen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías, ...).

b) Las matemáticas son un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones- problemas y las soluciones encontradas; como todo lenguaje implica unas reglas de uso que hay que conocer y su aprendizaje ocasiona dificultades similares al aprendizaje de otro lenguaje no materno.

c) Las matemáticas constituyen un sistema conceptual, lógicamente organizado y socialmente compartido; la organización lógica de los conceptos, teoremas y propiedades explican también gran número de las dificultades en el aprendizaje.

d) La búsqueda de relaciones entre los diversos objetos matemáticos pone en juego razonamientos inductivos y plausibles, pero la estructuración de los resultados se realiza de acuerdo con la lógica deductiva.

Las matemáticas constituyen, por tanto, una *realidad cultural* constituida por conceptos, proposiciones, teorías, ... (los objetos matemáticos) y cuya significación personal e institucional está íntimamente ligada a los sistemas de prácticas realizadas para la resolución de las situaciones-problemas.

Conocer y aprender matemáticas: su relación con la resolución de problemas

Como consecuencia de esta conceptualización del conocimiento matemático, "conocer" o "saber" matemáticas, por parte de una persona, no puede reducirse a identificar las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos. Debe implicar ser capaz de usar el lenguaje y el sistema conceptual matemático en la resolución de problemas y aplicar constructivamente el razonamiento matemático. Un sujeto no puede atribuir un sentido pleno a los objetos matemáticos a menos que éstos se relacionen con la actividad de la que indisolublemente provienen.

En consecuencia, la actividad realizada con el fin de resolver problemas es uno de los pilares del aprendizaje significativo de las matemáticas. La resolución de problemas no debe considerarse como un nuevo contenido a añadir al currículo matemático, como un apéndice de la enseñanza tradicional. Esta actividad es uno de los vehículos esenciales del aprendizaje de las matemáticas, además de una fuente de motivación intrínseca hacia la misma, ya que permite contextualizar y personalizar los conocimientos. Permite, asimismo, atribuir significado a las prácticas de índole matemática realizadas, mediante el reconocimiento de una finalidad o intención en las mismas.

Como propone Brousseau (1986), el trabajo intelectual del alumno debe ser en ciertos momentos comparable al de los propios matemáticos: el alumno debería tener oportunidad de investigar sobre problemas a su alcance, formular conjeturas, probar, construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías, intercambiar sus ideas con otros, reconocer las que son conformes con la cultura matemática, adoptar las ideas que le sean útiles.

Por el contrario, el trabajo del profesor es en cierta medida inverso del trabajo de matemático profesional: debe producir una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos, ya que debe buscar las mejores situaciones que den sentido a dichos conocimientos y ayudar al alumno en la búsqueda de las soluciones, las cuales serán sus propios conocimientos.

3. CRITERIOS PARA LA FORMACIÓN MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA DE MAESTROS

La preparación de los futuros profesores de primaria en el área de Didáctica de la Matemática debe centrarse en los conocimientos profesionales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas del nivel educativo correspondiente. Sin embargo, el estudio de los problemas didácticos no es posible sin un conocimiento suficiente del contenido disciplinar al que se refieren dichos conocimientos didácticos, en nuestro caso los contenidos matemáticos propuestos en los currículos de primaria (básicamente, sistemas numéricos, geometría elemental, medida y tratamiento de la información). Esto obliga a los futuros maestros a tener que estudiar también *matemáticas*.

No se trata sólo de que los estudiantes de magisterio tengan una base matemática insuficiente –con frecuencia encontramos estudiantes con este problema- sino que incluso aunque tales aspirantes hubieran cursado previamente una licenciatura de matemáticas sería necesario "volver a mirar de nuevo" los contenidos matemáticos elementales desde una perspectiva epistemológica diferente (más amplia y profunda).

El núcleo básico de la didáctica de las matemáticas sobre contenidos impartidos en los primeros niveles educativos es la construcción del sentido del lenguaje, los conceptos y métodos matemáticos por parte de los niños, mediante su referencia a las situaciones y problemas matemáticos presentes en la vida cotidiana. Esta atribución de significado a las tareas matemáticas escolares requiere conocimientos y destrezas matemáticas por parte del profesor que con frecuencia no están disponibles para los futuros profesores, y por tanto se deben contemplar en el período de su formación inicial.

Estas consideraciones llevan a proponer como materia troncal en los planes de formación de maestros a nivel nacional una materia curricular que recibe el nombre de "Matemáticas y su didáctica", junto con otras materias obligatorias de universidad, optativas y complementarias.

Un tema que suscita controversia es el siguiente: ¿Qué relaciones se deben establecer entre los conocimientos matemáticos y los didácticos? ¿Se deben considerar como materias independientes? Se puede pensar que es mejor atender a la formación matemática de los futuros maestros con una asignatura específica que contemple sólo los conocimientos matemáticos (y que, por tanto, podría ser impartida por profesores no especialistas en didáctica de las matemáticas). Por otra parte, la formación didáctica se lograría con otra /u otras asignaturas específicas que ya presupongan que los alumnos conocen suficientes matemáticas. Una opción alternativa puede ser tratar de coordinar ambas formaciones en una materia nueva bajo el título de "Matemáticas y su didáctica" que es la solución propuesta en el currículo oficial en España.

En el proyecto Edumat-Maestros defendemos que una parte del programa de formación se debe desarrollar conectando estrechamente la formación matemática y la didáctica sobre contenidos específicos (números, algoritmos, figuras geométricas, etc.), aunque respetando la coherencia y naturaleza propia de cada tipo de conocimiento. Otros temas sobre fundamentación del área de conocimiento y de carácter transversal respecto de los contenidos específicos podrán ser objeto de estudio independiente.

El análisis didáctico-matemático de las situaciones y tareas matemáticas de la educación primaria –que debe ser el eje central de la formación del maestro desde el área de la Didáctica de la Matemática- debe partir de la selección y estudio de situaciones-problemas que den sentido a los conceptos y métodos matemáticos propuestos en el currículo. Esto permitirá también contextualizar las nociones teóricas de didáctica que se consideren pertinentes como herramientas de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La formación de maestros en las diversas áreas curriculares no puede ocuparse exclusivamente de la selección de los contenidos, en nuestro caso, matemáticos y didácticos. La manera en que tales contenidos se estudian forman parte esencial del proceso formativo. O sea, el currículo de formación de maestros tiene que investigar respuestas, no sólo sobre qué matemáticas y qué didáctica estudiar sino también respuestas a las preguntas:

- cómo deberían estudiar los futuros maestros los contenidos matemáticos (conocimientos didácticos sobre contenidos matemáticos)
- cómo deberían estudiar los contenidos didácticos (conocimientos didácticos sobre contenidos didácticos).

En las restantes secciones de este trabajo vamos a indicar, en líneas generales, los criterios seguidos en el proyecto *Edumat-Maestros* para elaborar el Manual de Matemáticas y su Didáctica, que constituye una primera respuesta a las cuestiones planteadas. Esta propuesta, como se dirá más adelante, está abierta a la reflexión, experimentación, y progresivo enriquecimiento entre el colectivo de formadores de maestros.

4. CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS

El estudio de los contenidos matemáticos deberá enfocarse desde un punto de vista profesional, esto es, de manera que sea útil en el ejercicio del futuro trabajo como profesores de los niveles de educación primaria. Deberá tener en cuenta las conexiones de las matemáticas elementales con el mundo que nos rodea, conocer diferentes enfoques en la presentación de los conocimientos matemáticos, en particular enfoques constructivos e informales, más que las aproximaciones formalistas alejadas de las posibilidades cognitivas y los intereses de los alumnos de primaria. Por ejemplo, el estudio de los números naturales deberá enfocarse dando prioridad a una aproximación de tipo constructivo basada en las situaciones y las técnicas de recuento, en lugar de privilegiar una construcción logicista, como si fuera la única presentación correcta desde el punto de vista matemático.

Los contenidos que se desarrollan en este manual se agrupan en dos partes, una de carácter general sobre "Fundamentos de las matemáticas escolares y su estudio", y otra sobre conocimientos matemáticos y didácticos referidos a temas específicos del currículo escolar.

Para la parte 1 proyectamos desarrollar los 5 temas siguientes:

- *1. Enfoques epistemológicos sobre las matemáticas.*
- *2. Currículum matemático de la educación primaria.*
- *3. Procesos de estudio de las matemáticas (enseñanza y aprendizaje)*
- *4. Lenguaje matemático y recursos instruccionales*
- *5. Equidad y diversidad en el estudio de las matemáticas*.

La segunda parte del Manual incluirá 16 temas y un apéndice en los que se desarrollan aspectos específicos de los contenidos matemáticos que guardan estrecha relación con el currículo matemático de educación primaria:

- *1. Números naturales*
- *2. Adición y sustracción de números naturales*
- *3. Multiplicación y división de números naturales*
- *4. Divisibilidad. Teoría de números*
- *5. Números enteros*
- *6. Fracciones y números racionales*
- *7. Números decimales*
- *8. Proporcionalidad*
- *9. Estadística*
- *10. Probabilidad*
- *11. Medida directa de magnitudes*
- *12. Figuras geométricas*
- *13. Orientación espacial. Geometría de coordenada*
- *14. Medida de magnitudes geométricas*
- *15. Transformaciones geométricas. Simetría y semejanza*
- *16. Razonamiento algebraico*
- *Apéndice: Lógica, conjuntos y aplicaciones*

Criterios de selección de contenidos matemáticos para la formación de maestros

El Diseño Curricular Base para Educación Primaria del MEC, Área de Matemáticas, y los estándares propuestos por el NCTM (2000) para el currículum matemático de los niveles de educación desde infantil a bachillerato nos parecen una pauta pertinente para la selección y orientación de los contenidos para la formación de maestros. La disposición del currículo en los Estándares 2000 propone como una organización coherente del contenido y los procesos matemáticos.

Se formulan diez estándares que constituyen un cuerpo conectado de competencias y comprensiones matemáticas, especificando los conocimientos, y destrezas que los estudiantes deberían adquirir desde preescolar hasta el último nivel de secundaria. Se formulan estándares para cinco bloques de contenido matemático y cinco tipos de procesos matemáticos. Los bloques de contenido son: Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medición, Análisis de Datos y Probabilidad, mientras que los tipos de procesos matemáticos se refieren a: Resolución de Problemas, Razonamiento y prueba, Comunicación, Conexiones y Representaciones.

Las distintas áreas se solapan y están integradas. Los procesos se pueden aprender dentro de los contenidos, y los contenidos se pueden aprender dentro de los procesos. Por ejemplo, los números penetran en todas las áreas de matemáticas. Algunos temas sobre análisis de datos se pueden caracterizar como parte de la medición. Los patrones y funciones aparecen en geometría. Los procesos de razonamiento, prueba, resolución de problemas y representación se usan en todas las áreas de contenido.

5. ESTUDIO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO

La segunda cuestión que nos planteamos se refiere al modelo didáctico que se debería seguir para que los futuros maestros se apropien de los conocimientos matemáticos pretendidos: ¿Cómo ayudar a los futuros maestros a estudiar el contenido propiamente matemático seleccionado? Debemos reconocer que en este aspecto no hay apenas investigación y que tenemos que superar las prácticas artesanales que dominan la pedagogía universitaria.

En el proyecto *Edumat-Maestros* la práctica didáctica que proponemos incorpora para su experimentación los siguientes dispositivos:

a) Situaciones introductorias que contextualizan los conocimientos pretendidos, estimulan el recuerdo de los conocimientos previos, y la reflexión e indagación personal del estudiante.

b) Desarrollo sistemático de los conocimientos matemáticos que consideramos pertinentes para el maestro en formación, con ejemplos ilustrativos de los conceptos y argumentaciones y ejercitación de las técnicas.

c) Taller matemático, consistente en un conjunto de problemas y actividades que se proponen como base del trabajo práctico.

d) Prueba de autoevaluación de conocimientos matemáticos

6. CONOCIMIENTOS DIDÁCTICOS

Se trata de decidir qué conocimientos sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos específicos de primaria deben estudiar los futuros maestros. La investigación didáctica sobre los contenidos matemáticos de primaria (aritmética, geometría, etc.) es ya bastante abundante, aunque no hay una aceptación general sobre qué resultados son efectivamente válidos y que puedan ser un fundamento científico de la acción en el aula. Se impone por tanto una selección y organización de tales conocimientos didácticos que tenga en cuenta las restricciones institucionales particulares de la formación de maestros.

En el proyecto *Edumat-Maestros* consideramos pertinente incluir en cada tema información y práctica sobre los siguientes aspectos:

a) Orientaciones curriculares. Motivación fenomelógica e histórica

b) Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje

c) Tipos de situaciones didácticas y recursos

d) Conflictos cognitivos potenciales e instrumentos de evaluación

El desarrollo de los contenidos de didáctica de cada bloque de contenido matemático específico requiere incluir en el programa temas introductorios con información y actividades sobre cuestiones generales de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. También se deberá reflexionar sobre la naturaleza de la propia matemática y los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y recursos semióticos. Estos temas transversales pueden ser objeto de estudio de una asignatura independiente.

7. ESTUDIO DEL CONTENIDO DIDÁCTICO

Se trata de responder a la cuestión de cómo ayudar a los futuros maestros en el estudio de los conocimientos propiamente didácticos, o sea, decidir cuál será nuestra "praxis didáctica" sobre la didáctica de los conocimientos matemáticos de primaria.

Esta cuestión la afrontamos en *Edumat-Maestros* con los siguientes dispositivos:

a) Análisis de situaciones introductorias sobre problemas didáctico-matemático específicos del contenido tratado (respuestas de alumnos, secuencia de estudio de un manual, etc.). Esto permite motivar el estudio y contextualizar algunas de las herramientas de análisis didáctico disponibles (variables didácticas, concepciones, obstáculos, contrato didáctico, transposición didáctica, etc.).

b) Presentación de un síntesis de los conocimientos didácticos disponibles, con ejemplos ilustrativos y ejercicios.

c) Taller de didáctica, donde se propondrán actividades de análisis didáctico de tareas y situaciones escolares. Las actividades de este taller serán un componente básico del trabajo práctico del futuro maestro constituyendo una "simulación" y ejercitación de las tareas profesionales que realizarán en las prácticas de enseñanza efectiva en los colegios, y su futura labor como maestros en ejercicio.

A título de ejemplo listamos, a continuación, algunos tipos de situaciones y tareas a proponer en el taller de didáctica.

1) Dada una situación /problema matemático o un ejercicio, identificar:

- posibles estrategias de resolución por parte de los alumnos;
- conocimientos matemáticos movilizados en los distintos procedimientos de resolución (identificar y analizar los contenidos científicos subyacentes);
- nivel escolar en que se puede utilizar y los objetivos plausibles que pueden cubrirse;
- variables didácticas de la situación (elementos de la situación que pueden ser modificados por el maestro, y que afectan a las estrategias de solución –complejidad, validez, esfuerzo necesario)

2) Dada una muestra de producciones de los alumnos (protocolos de resolución de una tarea, o de una evaluación) identificar:

- los procedimientos de resolución seguidos;
- los conocimientos puestos en juego en cada procedimiento;
- causas posibles de los errores en cada caso;
- estrategias posibles de ayuda para superar las dificultades de los alumnos.

3) Dada una secuencia de situaciones (de un manual escolar o un proceso de estudio descrito), identificar:

- sentido particular de las nociones tratadas;
- las fases de secuencia y su caracterización;
- las competencias puestas de manifiesto;
- variables didácticas;
- posibles acciones del profesor ante los alumnos con dificultades.
- juzgar el momento y condiciones de utilización del documento correspondiente;
- describir algunas actividades a proponer como continuación de la secuencia.
- etc.

8. CONEXIONES MATEMÁTICO-DIDÁCTICAS

La lectura de los apartados anteriores podría sugerir que hemos optado por una separación radical entre los contenidos de matemáticas y de didáctica. Sin embargo, aunque ambos tipos de conocimientos tienen su propia naturaleza, que requiere una atención específica, consideramos que en el caso de la formación de maestros no deberían tratarse de una manera completamente independiente.

Además, el estudio de las situaciones y recursos para la educación primaria puede ser una fuente de problemas matemáticos que sirvan de punto de partida para profundizar en el estudio de las matemáticas puestas en juego. Es fácil cambiar las variables de las tareas para convertirlas en situaciones que requieran una actividad matemática de mayor nivel de complejidad.

En algunos temas, que son menos conocidos por los estudiantes de magisterio al iniciar sus estudios universitarios (Estadística y Probabilidad), hemos optado por esta solución. Pero en los restantes temas proponemos una separación más clara entre las situaciones matemáticas escolares y las correspondientes situaciones matemáticas universitarias. No obstante, hemos implementado un dispositivo que garantiza una conexión entre ambos saberes. Como un primer encuentro con la "matemática y su didáctica" incluimos en cada tema una "situación introductoria" en la que propondremos al futuro maestro resolver una colección de problemas-ejercicios, seleccionados de una colección de libros de texto de primaria. Se inicia, así mismo, el análisis didáctico del contenido centrado en la identificación de variables didácticas, la formulación de problemas relacionados y la estimación de la posible dificultad de las tareas propuestas. La consigna que proponemos es la siguiente,

Consigna:

Los enunciados que se incluyen a continuación han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos,

a) Resuelve los problemas propuestos.
b) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
c) Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
d) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno lo consideres más fácil de resolver y otro más difícil.

Las observaciones y comentarios sobre las situaciones introductorias, soluciones de los ejercicios, problemas y actividades de los talleres se incluirán en un fascículo independiente del "Manual para el Estudiante" que llamamos "Complementos para el Formador".

9. POLÍTICA EDITORIAL

La política editorial en la que apoyamos el Proyecto *Edumat-Maestros*, estrechamente relacionada con las posibilidades de desarrollo y distribución de la información que ofrece en la actualidad la red Internet, se basa en dos ideas básicas:

1) El manual se ofrecerá libremente a través de la red a toda la comunidad iberoamericana de formadores de profesores de primaria y a los propios futuros maestros de primaria, con la única restricción de citar la fuente cada vez que proceda, particularmente en las ediciones impresas que cada usuario realice.
2) Se invita a todos los formadores de profesores de didáctica de la matemática, interesados por el nivel de educación primaria, a contribuir a este proyecto con propuestas de mejora de las sucesivas ediciones que

se irán publicando en la red, en particular con nuevas actividades para los talleres matemático y didáctico. Las propuestas de mejora de las sucesivas ediciones, los comentarios y sugerencias se canalizarán a través de un foro de discusión específico abierto en, http://es.egroups.com/group/edumat-maestros.

10. OBSERVACIONES FINALES

En este trabajo hemos presentado la formación matemática y didáctica de los futuros maestros como un campo de acción e investigación para la didáctica de las matemáticas, que tiene especial relevancia por la importancia decisiva de la función docente como catalizadora y gestora de los aprendizajes. Cada una de las cuestiones abordadas en este trabajo y los recursos que se proponen están abiertos a su experimentación, evaluación y mejora progresiva. Con dicho fin hemos descartado la publicación y distribución tradicional del Manual ya que ello supondría restricciones para la difusión y actualización como consecuencia de las experiencias que puedan realizarse. El uso de la red Internet y del foro de discusión abierto proporciona posibilidades insospechadas hasta este momento, aunque también plantea nuevos retos para la innovación e investigación en el campo de la educación matemática.

Los contenidos propuestos en el Manual, unido a la metodología de tipo constructiva y heurística sobre la que pensamos se debe basar su desarrollo, requieren un fuerte incremento de los créditos asignados al área de Didáctica de la Matemática en los actuales planes de estudio de las distintas especialidadades de magisterio. Nuestra propuesta curricular se redacta, por tanto, con el horizonte del logro de una licenciatura para los estudios de Magisterio, como viene reclamándose desde hace tiempo por diversos autores y colectivos. Mientras se logra ese objetivo cada formador tendrá que tomar decisiones sobre qué aspectos tratar según sus circunstancias institucionales.

REFERENCIAS

Bishop, A. y cols (Eds.) (1996). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer (Caps, 29 a 33, desarrollo profesional del profesor de matemáticas)

Castro, Enr. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.

Carrillo, J. y Climent, N. (1999). *Modelos de formación de maestros en matemáticas*. Huelva: Servicio de Publicaciónes de la Universidad de Huelva.

Giménez, J., Llinares, S. y Sánchez, V. (Eds.) (1996). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática.* Granada: Comares.

Godino, J. D. (2002a). Investigaciones sobre teoría de la educación matemática.URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/teoria.htm/.

Godino, J. D. (2002b). Investigaciones sobre el significado y comprensión de las objetos matemáticos. URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/semiotica.htm.

Lin, F. L. y Cooney, T. J. (2001). *Making sense of mathematics teacher education*. Dordrecht: Kluwer.

Rico, L. (2000). Formación y desempeño práctico en educación matemática de los profesores de primaria. *Suma*, 34, pp. 45-51.

Rico, L., Fortuny, J. M. y Puig, L. (Eds.) (1987-91). *Matemáticas: Cultura y aprendizaje*. Madrid: Síntesis.