EL INTERACCIONISMO SIMBÓLICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Juan D. Godino, *Universidad de Granada*
Salvador Llinares, *Universidad de Sevilla*

Revista *Educación Matemática*, Vol. 12, nº 1: 70-92

RESUMEN:

Presentamos una síntesis de las principales características del enfoque de investigación conocido como Interaccionismo Simbólico (I.S.) a través de su posicionamiento en relación a: la noción de significado, al papel del lenguaje en el aprendizaje, la manera de entender el aprendizaje y el papel desempeñado por la negociación de los significados matemáticos (ambiguedad e interpretación). Se describen los constructos teóricos útilizados por el programa interaccionista para describir y comprender los fenómenos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemática: dominios de experiencia subjetiva, patrones de interacción y normas sociomatemáticas. Se identifican ciertas similitudes entre algunas de los constructos teóricos en el IS y en la Teoria de las situaciones didácticas y finalmente se situa el programa interaccionista entre el individualismo y el colectivismo en el intento por explicar el aprendizaje matemático.

1.CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA APROXIMACIÓN INTERACCIONISTA

Una parte sustancial de la investigación en educación matemática se ocupa de estudiar las relaciones entre el profesor, los estudiantes y la tarea matemática en las clases de matemáticas, tratando de encontrar respuestas fundadas a cuestiones del tipo, ¿cómo el profesor y los estudiantes llegan a compartir significados matemáticos para que el flujo de la clase continúe de forma viable?, ¿cómo comprende un estudiante las intervenciones del profesor?.

Para intentar responder a estas cuestiones es necesario desarrollar perspectivas teóricas que sean útiles para interpretar y analizar la complejidad de las clases de matemáticas. En este sentido, Bauersfeld (1994) indica que es posible utilizar constructos teóricos procedentes de la sociología y la lingüística (etnometodología, interaccionismo social, y análisis del discurso), pero que, ya que estas disciplinas no están directamente interesadas en las cuestiones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de contenidos curriculares, es necesario realizar una cierta traducción para responder a las cuestiones específicas de la educación matemática. Esta aproximación se apoya en el supuesto de que se generan diferentes prácticas en el aula si se toma las matemáticas como un conjunto de verdades objetivas, como algo existente y documentado objetivamente, o si se ve la práctica en el aula como un proceso de matematización compartida, guiada por reglas y convenios que emergen de la misma práctica. Esta segunda perspectiva subraya la importancia de la "constitución interactiva" del significado en las aulas y convierte en objeto de investigación las relaciones entre las características sociales de los procesos de interacción, así como las existentes entre el pensamiento del profesor y el de los estudiantes (Bauersfeld, Krummheuer & Voigt, 1988). Una perspectiva teórica que tiene implicaciones analíticas y que ha sido utilizada para estudiar estas relaciones es el interaccionismo simbólico (I.S.), cuyo supuesto básico es que las dimensiones culturales y sociales no son condiciones periféricas del aprendizaje matemático sino parte intrínseca del mismo.

Según la síntesis que realizan Sierpinska y Lerman (1996) del programa interaccionista aplicado a la educación matemática el interaccionismo es una de las aproximaciones a la investigación sobre el desarrollo intelectual que promueve una visión sociocultural sobre las fuentes y el crecimiento del conocimiento. Se enfatiza como foco de estudio *las interacciones entre individuos dentro de una cultura* en lugar de sobre *el individuo*. El énfasis se coloca en la construcción subjetiva del conocimiento a través de la interacción, asumiendo el supuesto básico de que los procesos culturales y sociales son parte integrante de la actividad matemática (Bauersfeld, 1995-b). Los fundamentos de la perspectiva interaccionista se pueden esquematizar en:

- el profesor y los estudiantes constituyen interactivamente la cultura del aula,
- las convenciones y convenios tanto en lo relativo al contenido de la disciplina, como en las regularidades sociales, emergen interactivamente, y
- el proceso de comunicación se apoya en la negociación y los significados compartidos.

Bauersfeld (1994) indica que, para comprender los logros individuales de los alumnos y las regularidades sociales que se generan en determinadas culturas de aula, es necesario considerar puntos de vista psicológicos y sociológicos sin dar preferencia a ninguno de ellos. En cierto sentido se identifica una reciprocidad entre,

- el cambio individual y el desarrollo a través de la participación en la interacción social, incluyendo la inevitable subjetividad de las construcciones personales; y
- la realización permanente de la cultura del aula y el cambio de las regularidades sociales a través de los miembros individuales (Bauersfeld, 1994; p. 138).

De esta manera, Bauersfeld (1994; p. 139) sitúa la perspectiva interaccionista en una posición intermedia entre dos polos, definidos de manera esquemática por,

- *la perspectiva individualista* (psicología cognitiva, con referencia a Piaget): el aprendizaje matemático se ve estructurado por los intentos del individuo de resolver lo que encuentra problemático en su mundo experiencial; el sujeto es el actor y el conocimiento matemático es construido por él;
- *la perspectiva colectivista* (teoría de la actividad, con referencia a Vygotsky): el aprendizaje consiste en la enculturación en estructuras sociales preexistentes, apoyado por medios-instrumentos mediadores o representaciones adecuadas; el sujeto es el objeto de prácticas culturales, y el conocimiento matemático dado es interiorizado.

Al estudiar el aprendizaje de los estudiantes, las perspectivas interaccionistas enfatizan tanto los procesos individuales de dotar de sentido como los procesos sociales, ya que se concibe el desarrollo de la comprensión personal de los individuos a través de su participación en la negociación de las normas del aula, incluyendo las generales y las que son específicas de la actividad matemática. Voigt (1996; p. 30) indica que una aproximación interaccionista enfatiza los procesos individuales de dotación de significado, señalando,

> "(el interaccionismo) no deriva el aprendizaje individual de la interacción social como se sugiere en las teorías de la socialización y de la internalización. Desde el punto de vista interaccionista, la interacción social no funciona como un vehículo que transforma el conocimiento "objetivo" en conocimiento subjetivo, sino que de hecho, la interacción social hace posible que las ideas subjetivas lleguen a ser compatibles con la cultura y con el conocimiento intersubjetivo como las matemáticas"

Para caracterizar el interaccionismo simbólico en educación matemática vamos a describir en esta sección su posicionamiento en relación a:

- el significado, la naturaleza del conocimiento matemático y los procesos de llegar a conocer (comprensión matemática),

- el papel del lenguaje, y
- el aprendizaje,

para finalizar describiendo los objetivos de la investigación del programa interaccionista.

1.1. Significado, conocimiento matemático y formas de conocer

Una idea clave en el interaccionismo simbólico es que el significado se desarrolla en (y a partir de) la interacción e interpretación entre los miembros de una cultura. En particular, el interaccionismo se basa en el análisis de tres premisas:

1. el ser humano orienta sus actos hacia las "cosas" en función de lo que éstas significan para él;
2. el significado de esas cosas se deriva de, o surge como consecuencia de la interacción social que cada cual mantiene con su prójimo (fuente del significado), y
3. los significados se manipulan y modifican mediante un proceso interpretativo desarrollado por la persona al enfrentarse con las cosas que va hallando a su paso (Blumer, 1982; p.2)

Un aspecto central de la perspectiva interaccionista es que el significado se desarrolla a través de la *interacción* y la *interpretación* ya que se enfatiza el proceso interpretativo implicado en la emergencia del significado cuando una persona responde, más que simplemente reacciona a las acciones de otro. Así, Blumer (1982) señala en relación a estos dos aspectos[1] lo siguiente

> "el significado que las cosas encierran para el ser humano constituye un elemento central en sí mismo ... (y) es fruto del proceso de interacción entre individuos ... (el significado) es un producto social ... [Además] la utilización del significado por una persona en el acto que realiza implica un proceso interpretativo ... con dos etapas claramente diferenciadas ... (en primer lugar) el agente se indica a sí mismo cuáles son las cosas hacia las que se encaminan sus actos ... (en segundo lugar) la interpretación se convierte en una manipulación de significados ... la interpretación es vista como un proceso formativo en el que los significados son utilizados y revisados como instrumentos para la orientación y formación del acto"(p.3-4).

Por otra parte, el interaccionismo defiende que es preciso enjuiciar la acción en función del agente ya que éste es el que construye su acción. *La acción* incluye una consideración general de las diversas cosas que percibe y la elaboración de una línea de conducta basada en el modo de interpretar los datos percibidos (Blumer, 1982; p.12). En particular, para que un proceso de comunicación sea satisfactorio es necesario que las representaciones de los individuos sean compatibles, de ahí que las interpretaciones en el proceso de interacción deben tener en cuenta las intenciones de los demás. Además, se toman como constructos individuales las representaciones (internas), que emergen a través de la interacción social, como equilibrio viable entre los verdaderos intereses de una persona y las condiciones realizadas, más que como una aplicación interna uno-a-uno de realidades dadas previamente o como una reconstrucción encajada del mundo. Como consecuencia, el análisis de la actividad y el discurso de los estudiantes se centra en las intenciones de los participantes (Yackel, 1995). Por consiguiente, en las perspectivas interaccionistas, el significado está en *el uso* de las palabras, frases, o signos y símbolos más que en los sonidos, signos o

[1] Blumer (1982) identifica otras nociones básicas en su caracterización del interaccionismo simbólico y que definen un esquema analítico específico: naturaleza de la vida en las sociedades y grupos humanos, naturaleza de la interacción social, naturaleza de los objetos, el ser humano considerado como organismo agente, naturaleza de la acción humana, interconexión de la acción.

representaciones. De ahí la importancia dada al lenguaje (una ampliación de esta reflexiones se realizará en la sección 1.2).

Conocer o recordar alguna cosa se concibe como la activación momentánea de opciones a partir de acciones experimentadas (en su totalidad), más que como un "objeto", llamado conocimiento, recuperable, almacenable y repartible desde el "desván" de la memoria. La noción conceptual utilizada en la perspectiva interaccionista para dar cuenta de este supuesto teórico es el “dominio de experiencia subjetiva” que será analizado en la sección 2.

La perspectiva interaccionista postula el carácter discursivo del conocimiento. En particular, las matemáticas son vistas como un tipo particular de discurso. 'El discurso', sin embargo, no es sólo 'lenguaje'; es lenguaje-en-acción, o lenguaje como un medio para lograr fines cognitivos, sociales u otros. Como discurso, las matemáticas establecen un cierto universo: las matemáticas son un modo de ver el mundo, y de pensar sobre él. Como este universo se establece por medio de la comunicación y la construcción de convenciones y comprensiones compartidas de los contextos, el tipo de conocimiento matemático que los estudiantes desarrollan depende de las características de las situaciones de comunicación en que se desarrollan. En algunas presentaciones de las posiciones interaccionistas se enfatiza el carácter convencional del conocimiento. 'Convencional', sin embargo, no quiere decir 'arbitrario', ni 'formal'. La calificación se refiere a las connotaciones de 'convención' tales como 'acuerdo' o 'consenso' sobre un conjunto de asuntos. Se refiere a la hipótesis de que los significados se logran por medio de negociación (Bauersfeld, 1995-a, p. 277).

La matematización describe una práctica basada en convenciones sociales más que en la aplicación de un conjunto de verdades eternas aplicables universalmente. Para Bauersfeld (1995-b; 143) hay una diferencia importante entre el concepto de *conocimiento como objeto* y la interpretación alternativa de *conocer como desarrollo*. Para Bauersfeld esta diferencia implica,

- el uso de un producto de un proceso, frente a,
- la fijación flexible del significado en el flujo real de la interacción social.

De ahí que Bauersfeld y sus colegas evitan la noción de conocimiento (knowledge) y prefieren hablar de conocer o formas de conocer (knowing, ways of knowing) (Bauersfeld,1995-a; p. 280). Esta perspectiva que subraya la íntima relación entre el individuo y lo social lleva al concepto de cultura (interpretada como la descripción por un observador de la estructura procesual de un sistema social) e introduce la idea de aprendizaje a través de la participación (esta idea será retomada en la sección 1.3 sobre el aprendizaje).

1.2. El lenguaje

El lenguaje es visto como un 'moldeador activo de la experiencia', no como 'un espejo pasivo de la realidad'. La orientación interaccionista hacia el lenguaje se distingue tanto del constructivismo como de la perspectiva Vygotskiana, aunque comparte con ellos el rechazo de una visión representacionista del lenguaje ('el lenguaje como una representación del mundo'). El interaccionismo deja de ver el lenguaje como un objeto separado -una herramienta - que puede ser usada para distintos propósito y que, en principio, podría ser reemplazado por otro medio de comunicación. Para el interaccionismo el habla (languaging) describe una práctica social, sirviendo en la comunicación para señalar experiencias compartidas y para la orientación en la misma cultura, más que un instrumento para el transporte directo del sentido o como un ‘transportista’ de los significados asociados. Mientras que Vygotsky vio en el lenguaje un medio de transmisión cultural.

Esta suposición sobre el lenguaje del I.S. lleva a la necesidad de la negociación continua de los significados en el aula dirigida a,

- conseguir una adaptación viable a los significados institucionales del contenido, y
- clarificar los significados compartidos de los signos y palabras en uso, aumentando la reflexión sobre los procesos constructivos subjetivos subyacentes (Bauersfeld, 1994; p. 141).

Esta última reflexión nos conduce a la cuestión del papel que desempeña el lenguaje en el aprendizaje y, en particular en el campo de la educación matemática, de cómo los estudiantes llegan a aprender lo que es un argumento convincente/válido en matemáticas mediante la negociación de los significados. Esto conduce a lo que se han denominado *normas sociomatemáticas* que son, desde la perspectiva social, el correlato de las creencias y valores matemáticos en la perspectiva psicológica, aspecto que será analizado en la sección 5.

En el constructivismo, el lenguaje es una expresión del pensamiento. El constructivismo critica la 'idea del conocimiento como representación de una realidad 'externa' que se supone es independiente del conocedor', pero no va tan lejos como para afirmar que el conocimiento es un discurso. De acuerdo con el constructivismo, la función primaria del lenguaje es expresar pensamientos individuales, no crear objetos culturales. Los pensamientos constituyen conocimiento en un individuo. Estos pensamientos son una función de los esquemas operacionales del sujeto que, aunque no son copias de una 'realidad externa', son todavía 'representaciones' en el sentido de modelos de las acciones del sujeto sobre alguna realidad física o mental.

1.3. El aprendizaje y la construcción subjetiva de significados

Para un educador matemático interaccionista, el aprendizaje no es precisamente un compromiso de la mente individual que intenta adaptarse a un entorno, o se reduce a un proceso de enculturación en una cultura preestablecida. Para el interaccionismo la construcción individual de los significados en la clase de matemáticas tiene lugar en interacción con la cultura de la clase, y al mismo tiempo contribuye a la constitución de esta cultura (Cobb y Bauersfeld, 1995, p. 9). De esta manera, *el aprendizaje* describe un proceso personal de formación, un proceso de adaptación interactiva a una cultura a través de la participación activa en dicha cultura (que en paralelo, reversiblemente, constituye la cultura en sí misma), más que una transmisión de normas y conocimiento objetivado. En este sentido, la práctica matemática en el aula es un proceso de matematización compartido que define una ‘subcultura’ especifica para ese profesor, esos alumnos y esa aula (Bauersfeld,1994; p. 140).

La *enseñanza* describe los intentos de organizar un proceso interactivo y reflexivo por el profesor implicado con los estudiantes en una secuencia realizable de actividades, y de establecer y mantener así una cultura de aula, más que de transmitir, introducir o incluso redescubrir un conocimiento codificado objetivamente y dado de antemano. Desde esta perspectiva interaccionista, las diversas construcciones subjetivas de significado y la necesidad de llegar a adaptaciones viables - “significados y regularidades compartidas” - requiere oportunidades para las discusiones y para la negociación de los significados (este aspecto será analizado en detalle en la sección 3). En este sentido, el uso didáctico de visualizaciones y materiales depende de las convenciones sociales compartidas, más que de un plan preparado, o del descubrimiento de estructuras matemáticas o de significado inherentes al material.

La noción de cultura, que surge del análisis del significado y de las formas de conocer las matemáticas vinculadas a una cierta práctica, plantea una perspectiva sobre el aprendizaje como forma de participación (Lave & Wenger, 1991) en la cual existe una interrelación mutua entre los miembros y su cultura (sin miembros no existe cultura) (Bauersfeld, 1995-a; p.281). Desde este punto de vista se entiende el desarrollo de la matematización en el aula como la constitución interactiva de una práctica social. Así, los resultados o productos de esta práctica social de matematización, que desde una perspectiva psicológica se describen como conocimiento matemático, aparecen como productos de una cultura específica. De esta manera los estudiantes llegan a lo que ellos conocen de matemáticas principalmente a través de su participación en la práctica social en el aula, más que descubriendo estructuras externas que existan independientemente de ellos (Bauersfeld, 1995-b).

1.4. Objetivos de las investigaciones del programa interaccionista

Como afirman Sierpinska y Lerman (1996), el fin de la mayor parte de la investigación del programa interaccionista en la educación matemática es lograr una mejor comprensión de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tal y como ocurren en los contextos escolares ordinarios. Hay menos interés en la elaboración de teorías para la acción y el diseño de acciones didácticas en sí mismas. Los resultados de la investigación en el programa interaccionista no conducen a recomendaciones para la acción sino a la descripción y discusión de diferentes posibilidades. No se pretende mejorar la microcultura de la clase de la misma manera que podemos cambiar el curriculum matemático o la macrocultura de la clase caracterizada por principios generales y estrategias de enseñanza. *"Deberíamos conceptualizar el cambio de una microcultura como una evolución mas bien que como una reorganización. Pero con el fin de influir y dirigir esa evolución, es útil comprender las regularidades y la dinámica de los procesos dentro de la vida de la clase"* (Voigt, 1995, p. 164).

Algunos de los problemas centrales que ve el interaccionismo para la educación matemática son:

¿Cómo se constituyen interactivamente los significados matemáticos en las diferentes culturas de la clase de matemáticas?

¿Cómo se estabilizan estos significados?

¿Cómo son estos significados y cómo dependen del tipo de cultura de la clase en que evolucionan?

2. NEGOCIACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS

El siguiente episodio, tomado de Bauersfeld, Krummheuer y Voigt (1988), de una lección de una clase de matemáticas sobre introducción de la probabilidad (con alumnos de 13-14 años) puede servir como ejemplo inicial del tipo de situaciones y cuestiones que tratan de estudiar los investigadores que comparten el punto de vista interaccionista simbólico:

> Los resultados de lanzar 100 veces un dado se escriben en la pizarra. El 1 ha salido 11 veces, el 2, 16 veces, etc. El profesor comienza preguntando: "¿Qué observáis?"
> Sin decirlo explícitamente, el profesor quiere que los estudiantes observen la variación de los diferentes resultados y relacionen las diferencias con el concepto de azar. Pero los estudiantes identifican regularidades tales como:
> "Los números son parecidos" y
> "Los números están entre 10 y 20".
> Obviamente, el profesor no espera oír tales respuestas. A continuación intenta dirigir a los estudiantes hacia la dirección correcta, o sea a conectar las diferencias con la aleatoriedad.
> Profesor: "Veis, los números son diferentes. Esto es normal, pero ¿por qué'?"
> Un estudiante responde: "Los 100 lanzamientos no se pueden dividir entre 6".

La noción clave de este punto de vista es la de negociación de significados que en síntesis consiste en la construcción interactiva de la intersubjetividad. En principio, los objetos del discurso de la clase son plurisemánticos, y es típico de las situaciones de enseñanza y aprendizaje que el profesor trate de construir para los objetos significados que difieren de los construidos por los estudiantes. Por tanto, los participantes tienen que negociar el significado con el fin de llegar a un significado compartido, esto es, comprendido por todos los miembros de la cultura de la clase. Por medio de la negociación del significado, los participantes constituyen significados 'tomados como compartidos', aunque no 'compartan el conocimiento' necesariamente. Las concepciones individuales se han hecho compatibles de modo que los individuos interactúan como si adscribieran el mismo significado a los objetos, aunque un observador puede reconstruir diferentes significados subjetivos. Desde esta perspectiva, el significado matemático no es tomado como existente independientemente de los individuos que actúan y de su interacción, sino que es visto generado en el curso de la interacción social.

Aunque las comprensiones individuales de los profesores y estudiantes contribuyen a la generación de los significados matemáticos característicos de una cultura de la clase dada, puede que no sea posible atribuir la autoría de un significado a alguien en particular. Los significados se pueden elaborar por medio de negociaciones por las que el grupo llega a estar de acuerdo sobre ciertas convenciones en la interpretación de signos, situaciones y conductas. El resultado final de estas negociaciones tiene propiedades emergentes: por la interacción, las contribuciones individuales pueden añadir algo sobre lo que nadie en particular había pensado y anticipado.

2.1. Ambigüedad e interpretación

Voigt (1996) indica que según creencias populares, las tareas, cuestiones, símbolos, etc. de las lecciones matemáticas tienen significados bien claros y definidos. Con el fin de darnos cuenta de la relevancia del concepto de negociación, es necesario desafiar estas creencias. Si observamos cuidadosamente los microprocesos que tienen lugar en una clase, reconoceremos que las tareas y los símbolos son ambiguos y requieren interpretación.

¿Cuál es el significado de '5' para un niño pequeño en una situación específica? ¿Recuerda al alumno este signo actividades previas (p.e., "un número difícil de escribir") ¿Le evoca emociones específicas (p.e., "mi número favorito")? ¿Relaciona su significado con otros números (p.e., "Igual a 2+3, 1+4, 0+5")? Etc.

Una hipótesis hecha por los interaccionistas es que cada objeto o suceso en la interacción humana es plurisemántico. Esto se puede ilustrar observando las diferentes interpretaciones del problema de la figura 1 (Voigt, 1995, p. 167).

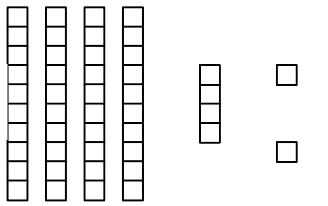
¿Cuánto tienes que añadir a  para obtener 73?

Fig. 1. Tarea de barras-y-cuadrados correspondiente a 46 + __ =73

Entre las posibles interpretaciones Voigt (1995; p.167) cita:
- El problema se puede interpretar como una actividad práctica. Las piezas tienen que ser conectadas manualmente una a otra, y se tiene que contar el número de cuadrados adicionales. No hay necesidad de identificar el primer número, o de contar las decenas".
- El problema puede dar lugar a operaciones con barras y cuadrados en la propia imaginación.

Las barras que faltan y los cuadrados dados tienen que ser contados con el fin de obtener siete barras y tres cuadrados.
- El problema se puede interpretar como un problema de cálculo con unidades abstractas numéricas. La primera representación de un número tiene que ser enumerada. Después se tiene que calcular la diferencia entre los dos números según las reglas del sistema de numeración.

El significado de decena difiere en estas opciones de comprensión. Diez se puede tomar como la cantidad de varios objetos, o como el nombre de una barra estándar, o como una unidad. (Voigt, 1995, p. 168).

Otro ejemplo analizado en Voigt (1994) se refiere a la ambigüedad de un dibujo que representa una jaula con un mono que tiene dos plátanos en las manos y un cuidador con tres plátanos. Al pie del dibujo hay un esquema con casillas vacías del tipo ~ ± ~ = ~, para que el alumno escriba una operación del tipo 5-2=3, según espera el profesor. Pero en realidad la situación puede ser interpretada de diversos modos:

2 + 3 = 5 (suma de plátanos)
5 - 2 = 3 (el guarda da dos plátanos al mono)
1 + 1 = 2 (el guarda y el mono)
3 - 2 = 1 (el guarda tiene un plátano más que el mono)
5 - 4 = 1 (un plátano mas que manos, el guarda perderá uno de los plátanos)

Las investigaciones realizadas bajo el punto de vista interaccionista ponen de manifiesto que, en principio, tales dibujos, problemas de los textos, juegos, historias, etc. tienen múltiples significados si los niños que interpretan la tarea no están familiarizados con el tipo específico de la misma. No obstante, muchos autores de textos y profesores de matemáticas parecen considerar que estos objetos tienen significados no ambiguos y que las tareas tienen soluciones definidas. Los procesos de matematización considerados como transparentes llegan a ser problemáticos cuando las situaciones se interpretan por sujetos que no son (aún) miembros de la cultura de la clase.

En las siguientes secciones presentamos una síntesis de los principales constructos teóricos elaborados por los investigadores que comparten el punto de vista interaccionista en educación matemática, particularmente Bauersfeld y colaboradores.

3. DOMINIOS DE EXPERIENCIA SUBJETIVA

Bauersfeld, Krummheuer y Voigt (1988, p. 177) elaboran un constructo teórico que denominan 'dominio de experiencia subjetiva' (DES), para adaptar al campo de estudio del aprendizaje matemático las nociones psicológicas de "script" (esquema, guión), "frame" (marco), "expert system" (sistema experto) y "microworld" (micromundo). Según el modelo DES el sujeto siempre forma experiencias en un contexto, en una situación dada. Estas experiencias son totales, esto es, no están limitadas a la dimensión cognitiva, incluyen también aspectos emocionales y motores. Según su especificidad situacional las experiencias de un sujeto se almacenan en la memoria en DES distinguibles. Por tanto, cada DES está formado inevitablemente por la totalidad y la complejidad de la situación en la misma medida en que ha sido experimentado y procesado como relevante por el sujeto.

Según el modelo de los DES, los conceptos generales, las estrategias y los procedimientos no están disponibles de manera general para la persona, esto es, independientemente de las situaciones. Los conceptos se activan desde la memoria de manera específica según su dominio de uso.

"Con el fin de comprender la 'misma' estructura matemática en contextos diferentes, 'la misma' tal y como es vista por el profesor, el aprendiz debe construir otro DES que le permita la comparación y conexión con el DES básico. Por tanto, las actividades de transferencia y abstracción llegan a un significado diferente según el modelo DES. Debido a la totalidad de la experiencia, el nuevo DES lleva su propia orientación específica para la acción, su propio lenguaje y sus propias normas. Como un proceso base para la transferencia o abstracción específica este nuevo DES facilita la relación de DES previos. Al mismo tiempo el nuevo DES mediatiza las reflexiones del sujeto sobre las primeras acciones" (Bauersfeld, Krummheuer y Voigt (1988; p. 178).

Las acciones del sujeto y la construcción relacionada de significado, tal y como es configurada en la situación social, son las bases decisivas para el desarrollo de un DES. Especialmente en las clases de matemáticas las acciones subjetivamente significativas están fuertemente conectadas con los medios de presentación del contenido matemático. Sin embargo, lo que el profesor quiere significar no son los medios de presentación, los objetos, materializaciones, etc., sino una cierta estructura matemática, o un concepto matemático. Puesto que éstos no son perceptibles directamente, en sus construcciones de significado de las acciones e informaciones el estudiante se adhiere estrechamente a las acciones percibidas del profesor, de los compañeros y de otras personas relevantes. El proceso de negociaciones conducirá a la constitución de la acción relevante, aceptada o adecuada en el proceso interactivo. La realización subjetiva del tema matemático permanece por tanto ligada al contexto de la experiencia, a las materializaciones usadas, y a la interacción social, mientras que al mismo tiempo el DES se desarrolla por medio de las construcciones activas y espontáneas de significado por el sujeto.

La noción de “dominio de experiencia subjetiva” que acabamos de describir nos parece que se apoya estrechamente en los presupuestos básicos de la corriente cognitiva que se conoce como “cognición situada” (Brown, Collins y Duguid, 1989). Para estos autores el conocimiento queda referido a la situación de la que surge y en la que se usa, “las situaciones co-producen el conocimiento por medio de la actividad. Se puede argumentar que el aprendizaje y la cognición son fundamentalmente situadas” (p. 32)

4. PATRONES DE INTERACCIÓN

Debido a la ambigüedad y a las diferentes interpretaciones posibles, la negociación del significado de una situación particular es frágil. Incluso aunque se comparta un contexto, hay un riesgo permanente de un colapso y desorganización en el proceso interactivo. Los *patrones de interacción* funcionan para minimizar este riesgo. "Los patrones de interacción se consideran como regularidades que son interactivamente constituidas por el profesor y los estudiantes". (Voigt, 1995, p. 178). Son una consecuencia de la tendencia natural a hacer las interacciones humanas más predecibles, menos arriesgadas en su organización y evolución.

Según describe Voigt (1995), los patrones de interacción se ponen en juego en las situaciones sin que sean pretendidos ni reconocidos necesariamente por los participantes. Cuando los participantes constituyen una regularidad que el observador describe como un patrón de interacción, dicha regularidad está estabilizando un proceso frágil de negociación de significados.

Diversas investigaciones han identificado varios patrones de interacción en la clase, algunos de los cuales describiremos a continuación.

4.1. Patrones extractivo y de discusión

El *patrón extractivo* (elicitation pattern) (Voigt, 1985) apunta a la combinación de dos afirmaciones aparentemente contradictorias. La idea de extraer un cuerpo nítido de conocimiento matemático se yuxtapone con las afirmaciones de una clase liberal y centrada en el niño. En este patrón se distinguen tres fases:

- El profesor propone una tarea ambigua, y los estudiantes ofrecen diferentes respuestas y soluciones que el profesor evalúa previamente. Esta fase se corresponde con la afirmación de que los estudiantes son estimulados a realizar análisis variados y espontáneos y descubrimientos según su competencia.
- Si las contribuciones de los estudiantes son demasiado divergentes, el profesor les guía hacia un argumento, una solución, etc., definida. Creyendo que ayuda a los estudiantes, el profesor plantea pequeñas cuestiones y extrae dosis de conocimiento. Esta fase corresponde a la idea socrática según la cual el profesor extrae fragmentos de conocimiento que están asociados con pequeños pasos en el razonamiento.
- El profesor y los estudiantes reflexionan y evalúan lo obtenido.

El "*patrón de discusión*" (discussion pattern) presenta las siguientes características:

- Los estudiantes han resuelto el problema propuesto durante el trabajo en pequeños grupos.
- A continuación, el profesor pide que informe un estudiante.
- El estudiante presenta una solución al problema y la explica.
- El profesor contribuye a la explicación del estudiante mediante preguntas adicionales, observaciones, reformulaciones, o juicios, de manera que una explicación o solución conjunta emerge y se toma como válida.
- El profesor pregunta a los estudiantes por otros modos de solución.
- Comienza de nuevo la primera fase.

Como afirma Voigt, hay algunas diferencias importantes entre ambos patrones de interacción. En el patrón extractivo, la solución es el fin principal; mientras que en el patrón de discusión la solución es el punto de partida de una explicación (similar al patrón de *afirmación - prueba* en las comunicaciones matemáticas, como ejemplo de patrón temático). En el patrón extractivo, los estudiantes se esfuerzan por seguir el modo de resolución del profesor paso a paso si quieren participar; mientras que en el otro patrón, la argumentación se beneficia de las contribuciones originales de los estudiantes. En un caso, las propias competencias del estudiante están escondidas, en el último caso se hacen públicas.

4.2. Patrones del embudo y de focalización

Voigt (1985) y Bauersfeld (1988) designaron como *patrón del embudo* (funnel pattern) al tipo de interacción entre profesor y alumnos caracterizado por el siguiente comportamiento:

- el profesor plantea un problema a los alumnos,
- los alumnos son incapaces de resolverlo,
- el profesor propone cuestiones más fáciles relacionadas con el problema y cuya solución conduce a resolverlo, pero sin que los alumnos pongan en juego una actividad intelectual mínimamente significativa.

El *patrón de focalización* (focussing pattern) (Wood, 1994) es inicialmente una variante del anterior, al tratar de crear, asimismo, las condiciones para el aprendizaje mediante una actividad conjunta. El profesor plantea un problema con un cierto nivel de dificultad para los estudiantes. Pero en lugar de resolver él prácticamente la cuestión,

- plantea una sucesión de preguntas con el objetivo de estrechar el foco de atención hacia un aspecto específico del problema, que es importante, pero que no es bien comprendido por los estudiantes;
- el profesor da al estudiante la oportunidad de resolver el problema, creando las

condiciones para que reflexione sobre su razonamiento y para que explique su idea, al tiempo que proporciona oportunidades a los restantes compañeros para que doten de significado a ese aspecto específico del problema.

4.3. Otros ejemplos de patrones de interacción

Sierpinska (1996) describe dos ejemplos de patrones (o formatos) de interacción entre un tutor y un estudiante, identificados en una investigación sobre enseñanza de nociones de álgebra lineal elemental con ayuda de un libro de texto. Los denomina DATSIT! (¡ESO ES!) y ARUSURE? (¿ESTÁS SEGURO?), por lo que podríamos describir como *patrones afirmativo* e *interrogativo*, respectivamente. En ambos casos un estudiante lee una sección introductoria sobre independencia lineal de vectores en R^n.

Formato DATSIT (! Eso es¡):

La sección sobre dependencia/ independencia lineal leída en el libro por el tutor y el estudiante estuvo precedida por una sección sobre sistemas homogéneos de ecuaciones y precedida por una explicación que transmitía la idea de que la nueva noción no es realmente nueva, porque se reduce a un cierto tipo de cuestiones sobre las soluciones de sistemas homogéneos de ecuaciones. El estudiante ha terminado de leer las definiciones y un ejemplo resuelto, donde la cuestión: ¿El siguiente conjunto de tres vectores de tres dimensiones es linealmente dependiente o independiente?, se respondía resolviendo y analizando la solución de un sistema homogéneo de ecuaciones. El tutor procedió a continuación, como era su costumbre, a una pequeña revisión o repetición de lo que se había leído.

Tutor: *Así que, un conjunto de vectores se dice que son linealmente independientes cuando* ... (levantando la voz)?
Estudiante l: (tímidamente) *Cuando solo hay una solución trivial.*
Tutor: *¡Eso es!*
Estudiante l: (asombrado) *¡Oh, ! ¿Eso es?*

Formato ARUSURE? (¿Estás seguro?):

Después de haber leído las definiciones de "conjunto de vectores dependientes e independientes", el estudiante exclama:

Estudiante: *¡Me parece que eso sólo puede ocurrir en casos muy especiales!*
Tutor: *¿Qué es lo que puede ocurrir sólo en casos especiales?*
Estudiante: *Que la suma de algunos vectores multiplicados por algunos números pueda dar cero.*
(señala a $a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0$). *Esto puede suceder solo muy excepcionalmente.*
Tutor: *¿Estas seguro? ¿Podemos encontrar algunos ejemplos?*

La siguiente hora de clase, tutor y estudiante, se dedicaron a tomar vectores e intentar si era posible obtener cero multiplicándolos por algunos números, llegando a la convicción de que era raro pero no imposible. Concluyeron que para que dos vectores fueran dependientes es suficiente que uno de ellos sea múltiplo del otro, y que en el plano tres vectores son siempre dependientes, etc. El libro se dejó aparte.

El tutor podía haber respondido: *¡pero hombre, lee el enunciado y verás pronto que no estás en lo cierto!* Pero el tutor no hizo eso, sino que tomó seriamente las dudas del estudiante. Tomándole con seriedad le transmitía el mensaje de que su conducta dubitativa era correcta, y que era bien recibida. A medida que esta interacción se repite, se convierte en un formato de interacción aceptado o estándar.

En opinión de la mayoría de los expertos en educación matemática el formato ¿ESTÁS SEGURO? debería ser practicado, mientras que el ¡ESO ES! se considera criticable, ya que conduciría a una comprensión superficial e instrumental. Esto no quiere decir que los profesores que practiquen este segundo patrón no obtengan "buenos rendimientos" entre sus estudiantes. Con más de un estudiante el patrón de interacción ¿ESTÁS SEGURO? puede funcionar sólo en casos muy especiales, por ejemplo, en clases pequeñas con estudiantes interesados en aprender realmente y no meramente en aprobar.

4.4 Patrones temáticos

Los patrones de interacción presentados previamente no son específicos de las clases de matemáticas; se pueden reconstruir en otras clases también, pero los "patrones temáticos de interacción" son más específicos de las clases de matemáticas. Un patrón temático se produce cuando el profesor y los estudiantes constituyen interactivamente relaciones entre significados matemáticos compartidos. Desde el punto de vista del observador, Voigt (1996) denomina a estas relaciones de significado un *tema matemático*. La variedad de opciones para continuar el tema se restringe por las convenciones de interpretación específicas de la tarea a realizar

El proceso de dotar de significado a un tema está basado en un consenso de trabajo y es un producto de la negociación. Un consenso de trabajo es un acuerdo tentativo logrado mediante la negociación en la interacción social. Se considera como un 'modus vivendi' mas bien que una congruencia de significado relacionada con el contenido. En los procesos de enseñanza-aprendizaje, un consenso de trabajo es extremadamente provisional y frágil.

En el patrón temático de *matematización directa*, una historia o un dibujo es interpretado como un problema de cálculo específico, mientras que otras interpretaciones alternativas no se consideran como del tema. En el caso de la resolución de la tarea de la figura 1, Voigt (1995, p. 188) identifica dos patrones temáticos de interacción que indicamos en la tabla l.

Tabla l: Dos patrones temáticos

TI: *Patrón temático de contaje de Materiales*	T2: *Patrón temático de cálculo con números de dos dígitos*
Trabajando juntos, algunos estudiantes interpretan los signos como representaciones de materiales concretos. Comparan las barras y los cubos separadamente. Una solución típica sería: Añadir 3 barras y quitar 3. *El tema* son las cantidades de materiales	Trabajando juntos, algunos estudiantes interpretan los signos como representaciones de signos. La diferencia se calcula dentro del sistema de los números. Una solución típica sería: 46, 56, 66 son 20, y 4, 3, es 27. *El tema* es la aplicación de reglas aritméticas

Para Voigt (1996) el tema matemático es el significado dado a la tarea que se está realizando por parte de los estudiantes desde la perspectiva del observador. En el ejemplo anterior, el significado matemático dado a la tarea por parte de los estudiantes se infiere del proceso de resolución empleado y de la naturaleza de las interacciones producidas. Aunque la tarea es la misma, el *significado matemático* que el observador infiere a partir de las interacciones es diferente. En un caso se trata de la noción de decena asociada a un modo de representación concreto-físico y el establecimiento del paralelismo entre las supuestas relaciones entre números con la manipulación del material; el tema “matemático” derivado de las interacciones se identifica por el observador como “manipular cantidades de materiales”. Sin embargo, en el segundo caso, el observador puede inferir a partir de las interacciones observadas que el tema matemático para los resolutores es la aplicación de reglas aritméticas. De hecho lo que el análisis de los patrones temáticos intenta mostrar es que el *tema* puede que no sea una representación del contenido matemático que el profesor pretende establecer.

5. NORMAS SOCIALES Y SOCIOMATEMÁTICAS

Las interacciones entre profesor y alumnos están con frecuencia regidas por 'obligaciones' o normas no explícitas. En las primeras secciones de este trabajo habíamos indicado los supuestos que colocan las perspectivas interaccionistas sobre el uso del lenguaje (entendido ampliamente), subrayando la importancia de la negociación de los significados como una manera de dar cuenta de cómo los estudiantes desarrollan la comprensión de las nociones matemáticas y desarrollan creencias y actitudes en relación a las matemáticas.

El siguiente episodio es un ejemplo de estas normas implícitas en el aula. En esta viñeta extraída de la clase de introducción a la probabilidad que habíamos mencionado con anterioridad, un estudiante no cumple las expectativas del profesor, esto es, viola una obligación desde el punto de vista de un observador externo. El profesor procura mantener el sentido de normalidad y la imagen de una clase orientada al ideal popular del aprendizaje por descubrimiento (Voigt, 1994, p. 182):

> Profesor:Es suficiente por el momento. No podemos escribir todos los resultados, ¿verdad? ¿Alguien ha observado algo?
>
> Estudiante:¿Qué se supone que debo observar?
>
> Profesor: ¿Que se supone que debes observar? Algo que debes saber por ti mismo. Berta, ¿has observado algo?

También las actividades del profesor están sujetas a obligaciones. Por ejemplo, en las clases tradicionales los estudiantes esperan a menudo que el profesor presente un algoritmo oficial para resolver los problemas paso a paso sin necesidad de tener que reflexionar (¿qué hacer a continuación?) "Así, que los estudiantes no son solo las 'víctimas' de esta cultura escolar sino también los 'culpables'" (Voigt, 1994; p. 182-3).

Las *normas sociales* en el seno de la clase son convenciones que describen cómo colaborar unos con otros, así como las obligaciones que describen cómo reaccionar socialmente ante un error o una indicación. La investigación sobre la enseñanza ha identificado la existencia de unas normas sociales que ayudan a caracterizar las microculturas del aula. Algunas de estas normas sociales son generales y se pueden aplicar en cualquier aula independientemente de la disciplina. Regulan el funcionamiento de las actividades docentes y discentes. Por ejemplo, se supone que en la clase los alumnos deberían adoptar una actitud crítica hacia las afirmaciones que se hacen, tanto por uno mismo como por los demás, independientemente de si se trata de una clase de matemáticas, como de ciencias o de literatura. Se espera (norma social) que los estudiantes expliquen las soluciones que proponen a cualquier cuestión. Son normas sociales caracterizadas por explicar, justificar y argumentar ya que se supone que en situaciones ideales los estudiantes deberían desafiar las explicaciones y justificaciones de sus compañeros, asi como justificar sus propios argumentos Sin embargo, existen aspectos normativos de la discusión matemática que son específicos de la actividad matemática de los estudiantes. Por ejemplo, la comprensión de lo que en el aula se puede considerar “matemáticamente diferente”, “matemáticamente sofisticado”, “matemáticamente eficiente” y “matemáticamente elegante”, así como lo que se puede considerar como una explicación matemáticamente aceptable. Voigt (1995) identifica, además, como normas sociomatemáticas,

- las normas de clase que implican la valoración de una solución a un problema como inteligente o inventiva , y
- las explicaciones y argumentaciones consideradas como matemáticamente correctas.

Es decir, las normas sociomatemáticas son aspectos normativos de las discusiones matemáticas que son específicas de la actividad matemática de los estudiantes y que regulan las argumentaciones matemáticas e influyen en las oportunidades de aprendizaje. Desde esta perspectiva, por tanto, las normas sociomatemáticas son, en la perspectiva social, el correlato de las creencias y valores identificados en la perspectiva psicológica al intentar dar cuenta de cómo los estudiantes llegan a ser intelectualmente autónomos en matemáticas (una cuestión vinculada al dominio de las creencias y actitudes). En este sentido, lo que llega a ser matemáticamente normativo en un aula viene condicionado por los objetivos reales, las creencias, las suposiciones e hipótesis de los participantes en el aula, al mismo tiempo que estos objetivos y la comprensión están influenciados por lo que es legitimado como actividad matemática aceptable (Yackel & Cobb, 1996).

Las normas sociomatemáticas son diferentes de las normas sociales generales que rigen el comportamiento en las aulas en el sentido de que son específicas de los aspectos matemáticos de la actividad de los estudiantes. En este contexto, ya que el desarrollo del razonamiento y los procesos de dotar de sentido desarrollado por los estudiantes no puede ser separado de su participación en la constitución interactiva del significado matemático, es por lo que se da tanta importancia a las normas sociomatemáticas. Sin embargo, Yackel y Cobb (1996) indican que la distinción entre la normas sociales y las normas sociomatemáticas en las aulas son sutiles, indicando como una manera de diferenciarlas lo siguiente: “la comprensión que se le supone a los estudiantes para explicar sus soluciones y sus formas de pensar es una norma social, mientras que la comprensión de lo que se considera como una explicación matemáticamente aceptable es una morma sociomatemática” (Yackel & Cobb, 1996; p. 461). Es decir, existen unas normas sociales que rigen una discusión y un intercambio de argumentos independientemente de lo que se esta diciendo (norma social, por ejemplo que se deben presentar argumentos diferentes de los que se han presentado hasta ese momento), junto con el reconocimiento de lo que es matemáticamente aceptable, teniendo en cuenta sobre lo que se esta hablando (norma sociomatemática, por ejemplo que lo propuesto es matemáticamente diferente). Metodológicamente, tanto las normas sociales generales como las normas sociomatemáticas se infieren al identificar regularidades en los patrones de interacción social.

5.1. La constitución y desarrollo de las normas sociomatemáticas.

Voigt (1995) explica con un ejemplo el proceso de constitución de una norma sociomatemática de lo que es “matemáticamente diferente”. En el experimento de enseñanza que analiza en este trabajo se propone a los estudiantes resolver las tareas siguientes:

27 + 9 = __ ; 37 + 9 = __ ; 47 + 9 = __ ; 47 +19 = __ ; 48 +18 = __ ; 49 +17 = __ ; ...

Muchos estudiantes resolvieron las tareas como problemas aislados, usando los dedos, marcas, u otros materiales. Otros compararon las tareas y usaron las soluciones previas para resolver las siguientes. A continuación, durante la discusión con toda la clase, se compararon diferentes modos de resolución. La profesora aceptó todas las explicaciones correctas. Por ejemplo, la profesora dijo: "Este ha sido un modo de hacerlo. Ahora, ¿quién lo hizo de un modo diferente?". En contextos donde los estudiantes están obligados a intentar soluciones personalmente significativas que deben ser explicadas y justificadas la intervención de la profesora en el sentido de preguntar si alguien había *resuelto el problema de manera diferente,* es una característica del inicio del proceso de constitución de la norma

sociomatemática de lo que es “matemáticamente diferente”. De hecho, Yackel & Cobb (1996) señalan que en las aulas que ellos analizaron no había criterios dados de antemano para considerar cuándo una solución era diferente. Así, el significado de lo que constituía algo “matemáticamente diferente” era negociado por el profesor y sus estudiantes a través de la interacción. Las acciones y respuestas del profesor condicionaban el desarrollo de la comprensión de los estudiantes de lo que podía significar matemáticamente diferente, y las respuestas de los estudiantes contribuían al desarrollo de la comprensión del profesor. En el caso particular de lo que constituye una solución matemáticamente diferente estos autores señalan que la petición del profesor de soluciones diferentes provoca un cambio de contexto, de uno de resolver el problema a otro de comparar soluciones. Así, el contexto de la actividad del estudiante se amplía más allá de escuchar a intentar dotar de sentido a las explicaciones de los demás, intentado identificar semejanzas y diferencias entre diversas soluciones como se puede apreciar en el siguiente ejemplo (Yackel & Cobb, 1996; p. 463):
Ejemplo: El problema 78-53 = __ estaba escrito en la pizarra y se presentó como una actividad de cálculo mental.

Dennis: Dije, um, 7 y le quito 50, lo que es igual a 20
Profesor: Correcto
Dennis: Luego, luego quité, quité 3 de 8 y quedan 5.
Profesor: OK, ¿y cuánto te queda?
Dennis: 25 ....
.../...
Profesor: Ella?
Ella: Yo dije el 7, el 70, dije el 70 menos el 50 ... dije 20 y 8 más 3, ...
Oh!, sumé, dije 8 menos 3 serán 5.
Profesor: Correcto. ¿Esto tiene que ser?
Ella: Y esto es 75 ... quiero decir 25.
Dennis (protestando): Mr. K., es lo mismo que yo dije.

Por otra parte, Yakel & Cobb (1996) sostienen que el considerar lo que permite aceptar como soluciones diferentes, sofisticadas, eficientes y elegantes en matemáticas implica un sentido compartido de cuándo es apropiado contribuir en una discusión; y lo que da cuenta de cuándo una explicación y justificación es aceptable tiene que ver con el proceso real mediante el cual los estudiantes contribuyen a la constitución del significado compartido.

5.2. El papel del profesor en la constitución y evolución de las normas sociomatemáticas.

En el primer ejemplo propuesto la profesora evaluó de manera diferente las explicaciones de las respuestas correctas. Enfatizó aquellos procedimientos que parecían ser más elaborados desde el punto de vista cognitivo, como identificar un patrón en la serie de operaciones. En las clases observadas por Voigt (1995 y Yackel y Coob (1996), la profesora caracterizó tales soluciones como modos "inteligentes" o "simples", como "descubrimientos", etc.. También esbozó la estructura matemática explícitamente, o pidió a los estudiantes que explicaran sus métodos una vez más al tiempo que requería a los demás estudiantes que escucharan, o bien expresó admiración. Mediante estas evaluaciones, la profesora hacía valoraciones matemáticas implícitamente de lo que podía ser considerado “matemáticamente diferente”, “matemáticamente sofisticado”, “matemáticamente eficiente” o “matemáticamente elegante” y que los estudiantes decidían seguir o no. En este caso, lo que cuenta como una solución matemática elegante se constituyó interactivamente. La profesora no estableció un estándar que los estudiantes tenían que obedecer paso a paso. Algunos estudiantes, y no la profesora, ofrecieron contribuciones matemáticamente avanzadas. La profesora evaluó las contribuciones, de modo que representaba a la disciplina matemática.

Los estudiantes podían tomar las evaluaciones de la profesora como observaciones para realizar exploraciones más avanzadas. Por medio de estos procesos de interacción la calidad del discurso matemático evoluciona. Como consecuencia, las exigencias de la profesora y los fines de los estudiantes se acoplan.

Aunque el profesor puede ser visto como el representante de la institución escolar, y de la disciplina matemática, las normas constituidas dependen de la comprensión de los estudiantes, sus actitudes, voluntad, etc. Son constituidas en las interacciones de la clase y consideradas como compartidas. Las normas sociomatemáticas no son obligaciones explícitas que los estudiantes tengan que cumplir, facilitan los intentos de los estudiantes para dirigir sus actividades en un entorno que proporciona libertad relativa para interpretar y resolver problemas matemáticos.

La negociación de las normas sociomatemáticas también genera oportunidades de aprendizaje para el profesor (McClain & Cobb, 1997). Las discusiones en el aula permiten que el profesor pueda escuchar y dotar de sentido a las explicaciones de los estudiantes, lo que le permite poder seleccionar las tareas que se les puede presentar a los alumnos de una manera más desafiante en relación al tipo de soluciones que presentan. De esta manera, el tipo de tareas que el profesor presenta y la organización del contenido matemático implícito en la secuencia de dichas tareas muestra la evolución de su comprensión del desarrollo conceptual y de la actividad matemática de sus estudiantes.

6. TEORIA DE SITUACIONES E INTERACCIONISMO SIMBÓLICO

Aunque la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1996) debe entenderse como un modelo teórico independiente del enfoque del interaccionismo simbólico, tanto por su propia aspiración a constituir una epistemología experimental de las matemáticas como por la ausencia de cualquier referencia mutua, nos parece que algunos elementos de la teoría de situaciones guardan, de hecho, una estrecha relación con nociones acuñadas por el I. S. Así ocurre, por ejemplo, con los fenómenos de didáctica que Brousseau denomina "efecto Topace" y "efecto Jourdain", los cuales se pueden describir como patrones de interacción profesor-alumno-saber. Asimismo, la noción de *contrato didáctico*, clave en la teoría de situaciones, nos parece que responde parcialmente a la descripción de las normas sociomatemáticas. Analizamos, a continuación, con algo más de detalle estas similitudes.

Brousseau asegura que la relación didáctica entre profesor, alumnos y un saber pretendido está condicionada por un proyecto social exterior que se impone tanto a uno como a otro.

"Se establece una relación que determina -explícitamente en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente- lo que cada participante, el profesor y el alumno, tienen la responsabilidad de administrar y de la cual será de una u otra forma responsable ante el otro. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato. Lo que nos interesa aquí es el contrato didáctico, es decir, la parte de ese contrato que es específico del "contenido": el conocimiento matemático pretendido" (Brousseau, 1986, p. 51).

Las actuaciones del profesor y los alumnos deben cumplir las siguientes expectativas:

- el profesor debe crear las condiciones suficientes para que los alumnos se apropien de cierto conocimiento, y que reconozca cuándo se produce tal apropiación;
- el alumno debe cumplir las condiciones establecidas por el profesor;
- la relación didáctica debe "continuar", cueste lo que cueste;
- el profesor debe garantizar que los conocimientos anteriores y las nuevas condiciones creadas dan a los alumnos la posibilidad de apropiarse del conocimiento.

Sin embargo, al igual que en el I. S. donde las normas sociomatemáticas son negociadas en el seno de la clase, lo esencial del "contrato didáctico" no son las normas que restringen las actuaciones del profesor y los alumnos, sino el proceso de búsqueda (negociación) de un contrato hipotético.

Como hemos visto, en el I. S. se distinguen las normas sociales de las normas sociomatemáticas. También en teoría de situaciones el contrato didáctico forma parte del contrato pedagógico y del contrato escolar, los cuales dan cuenta de restricciones más generales de los papeles docentes y discentes. Chevallard, Bosch y Gascón (1997, p. 205) explican claramente las diferencias entre los tres tipos de contratos. Un alboroto en una clase de matemáticas puede ser explicada bien porque hay un pequeño grupo de alumnos que no están integrados realmente en la escuela y preferirán estar en otro sitio (ruptura del contrato escolar), o bien a los alumnos no les gusta el "estilo" pedagógico del profesor -no tiene suficiente autoridad, menosprecia a los alumnos, etc.- (ruptura del contrato pedagógico), o bien quizás el profesor está resolviendo un problema por una técnica que los alumnos desconocen (ruptura del contrato didáctico).

El llamado "*efecto Topaze*" es un formato de interacción, que se explica por las restricciones del sistema social en que puede tener lugar la enseñanza, y que se traduce en una pérdida del sentido matemático de los conocimientos pretendidos. El profesor propone una tarea a sus alumnos cuya respuesta está generalmente más o menos predeterminada; el profesor negocia las condiciones en las que se producirá y que le darán un sentido. Inicialmente intenta que este sentido sea lo más rico y exacto posible y, para ello, propone preguntas lo más abiertas posibles. Pero en el caso frecuente de que los alumnos fracasen, comienza a dar informaciones suplementarias para hacer la respuesta más fácil.

"Si los conocimientos pretendidos desaparecen completamente, es el 'efecto Topaze'. El mantenimiento del sentido a través de los cambios en las cuestiones está bajo el control de los conocimientos del maestro en la disciplina enseñada pero la elección de las situaciones de aprendizaje y su gestión, habitualmente dejada al "buen sentido" de los profesores, son actualmente objeto de activas investigaciones tanto teóricas como de ingeniería didáctica" (Brousseau, 1986, p. 42).

El "*efecto Jourdain*" es una forma del efecto Topace: para evitar un debate sobre el conocimiento pretendido con el alumno y eventualmente la constatación de un fracaso, el profesor acepta reconocer como índice de un saber o de un avance auténtico una respuesta o un comportamiento del alumno que no son de hecho más que respuestas que tienen causas triviales y, por tanto, desprovistas de valor o incluso de sentido.

Estas descripciones nos parecen ciertamente similares a las que Bauersfeld y Voigt dan del patrón de interacción que denominan del "embudo" (funnel pattern). Pero el análisis de los patrones de interacción no queda reducido a las relación entre profesor y alumnos en la teoría de situaciones. Brousseau trata de caracterizar fenómenos de didáctica, esto es, regularidades observables en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas explicables dentro de un marco teórico propio. Por ello también describe como fenómenos de didáctica, entre otros, el denominado "*deslizamiento metacognitivo*" y el "*envejecimiento de las situaciones didácticas*", en los cuales, los patrones de interacción se refieren a relaciones entre el profesor y los recursos didácticos y las propias situaciones, respectivamente. La propia tipología de situaciones didácticas que se elabora (acción, formulación-comunicación, validación, institucionalización) puede ser vista también como formatos de interacción profesor- alumnos – saber – medio, que condicionan y determinan los significados de los conocimientos puestos en juego en la clase de matemáticas, y por tanto los aprendizajes alcanzables.

7. SÍNTESIS Y OBSERVACIONES FINALES.

En esta última sección vamos a realizar una síntesis y algunas observaciones sobre el interaccionismo simbólico como programa de investigación en educación matemática centrándonos en,

- la complementariedad entre el análisis de la estructura y la naturaleza de las interacciones, con la consideración de la estructura del contenido matemático; y
- el equilibrio entre aproximaciones individualistas y colectivistas en el análisis del aprendizaje matemático.

En el I. S. la noción de significado (de un objeto) nace de la relación entre el sujeto y el objeto. Un objeto es "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia" (Blumer, 1982, p. 8). "La naturaleza de un objeto -de todos y cada uno de ellos- consiste en el significado que éste encierra para la persona que como tal lo considera. El significado determina el modo en que una persona ve el objeto, la manera en que está dispuesta a actuar con respecto al mismo y la forma en la cual se dispone a hablar de él" (p. 8). Pero, además, se introduce la dimensión social indicando que el significado es fruto del proceso de interacción entre individuos, un producto social, una creación que emana de, y a través de, las actividades definitorias de los individuos a medida que éstos interactúan. El énfasis se pone en la descripción de los procesos por los cuales se entienden las personas, esto es, los procesos por medio de los cuales se ponen de acuerdo sobre lo que refieren las palabras, signos, acciones, y también sobre el valor, la utilidad e importancia de las cosas. El I. S. se propone describir, comprender los patrones de interacción en el seno de la clase de matemática, para inferir los significados puestos en juego, pero no juzgar ni prescribir cómo son o deberían ser tales patrones, ni incluso tales significados. Esta característica del I.S. la expresa Sierpinska (1997, p. 11) con claridad:

″Se supone que estudiamos e intentamos comprender los fenómenos de la enseñanza, no juzgarlos ni decir qué formatos [patrones] son "buenos" o "malos". De hecho, el valor de un formato particular sólo se puede juzgar en términos de los objetivos y expectativas de los participantes de la interacción... Todo juicio implica una cierta ideología. El interaccionismo propone una actitud filosófica hacia las ideologías: discutir sin tomar partido″.

Coincidimos con Seeger (1991, p. 138) cuando afirma que las investigaciones realizadas bajo el marco del interaccionismo simbólico han demostrado que el proceso de enseñanza y aprendizaje matemático no se puede estudiar sin una referencia a la dimensión interactiva de la representación y la adquisición del conocimiento. “Pero, no se puede prescindir -como hace el interaccionismo simbólico- de la estructura del contenido. Dado que cualquier tipo de aprendizaje y conocimiento es el resultado de un proceso social, la interacción no se puede ver como opuesta al conocimiento”. Con esta cita se subraya la necesaria complementariedad entre los análisis centrados en la naturaleza y estructura de las interacciones y en lo que se considera el contenido de estas interacciones (los objetos y procesos matemáticos). En los dominios científicos hay unos significados establecidos para la clase de objetos que se consideran -sean símbolos o entidades conceptuales- que deben ser asumidos por las personas que tienen que participar de la cultura científica correspondiente. En consecuencia, pensamos que es necesario complementar los presupuestos semióticos del I.S. con modelos epistemológicos explícitos sobre la naturaleza y estructura de las objetos matemáticos para poder describir y explicar los procesos de generación y desarrollo de los objetos matemáticos (Escudero & Sánchez, 1999). Otros modelos teóricos para la didáctica de las matemáticas que adoptan la noción de significado como central y que tienen en cuenta la estructura del conocimiento matemático son los elaborados por Godino y Batanero (1994; 1999) y Steinbring (1997).

Por otra parte, la aproximación interaccionista media entre el individualismo y el colectivismo. A grandes rasgos, el individualismo tiende a explicar el aprendizaje matemático como el producto de las leyes del desarrollo cognitivo y de la auto-orientación del individuo que experimenta un problema. El colectivismo intenta comprender el aprendizaje matemático como la socialización del individuo en una cultura dada previamente. Desde el punto de vista interaccionista, los estudiantes y el profesor se influyen mutuamente. De hecho, las influencias sutiles e indirectas son especialmente importantes. El profesor y los estudiantes constituyen interactivamente los significados matemáticos y las normas sociomatemáticas se comparten de modo que el aprendizaje de los estudiantes y la microcultura se desarrollan mutuamente.

Algunos interaccionista han visto complementariedad, si no compatibilidad, entre el constructivismo y el interaccionismo, o entre la teoría de Vygotsky y el interaccionismo. El constructivismo y el interaccionismo son complementarios en el sentido de que toman perspectivas diferentes sobre el conocimiento de las personas. En el constructivismo es el punto de vista del individuo el que trata de darle sentido al mundo. En el interaccionismo es el punto de vista de un observador de la vida social; mira a las personas compartiendo significados y al funcionamiento del lenguaje como creador de significados.

Sin embargo, hay profundas diferencias entre las dos aproximaciones, especialmente las que se refieren al modo en que ven el lenguaje, la comunicación y el conocimiento. Tanto Gergen como Bauersfeld ven las aproximaciones que promueven (construccionismo social e interaccionismo, respectivamente) como pasos teóricos en la superación de un dualismo epistemológico. Para Bauersfeld, el interaccionismo es un modo de superar el dilema entre las visiones individualistas y colectivistas sobre las fuentes de significado. De acuerdo con el interaccionismo, los significados no son generados ni por mentes individuales ni son un atributo de una 'mente colectiva' de una sociedad históricamente fundada, sino que están continuamente constituidos en interacciones cuyo carácter modelado (patterned) da cuenta de la relativa estabilidad de las culturas. Gergen (1995) ve el construccionismo social como una epistemología que supera la oposición tradicional entre lo que él llama orientaciones hacia el conocimiento exógenas (empíricas y centradas en el mundo) y la endógena (racionalista y centrada en la mente).

Como afirman Sierpinska y Lerman (1996), el interaccionismo rehabilita algunos valores 'pasados de moda' en la educación. Por ejemplo, el aprendizaje imitativo 'es la forma más común de aprendizaje en una cultura'. Otra posición importante que defiende es que la gente aprende indirectamente, mediante la participación en una cultura y en sus prácticas discursivas. El profesor, sin embargo, juega un papel importante: "Como un agente de la cultura inmersa, el profesor funciona como un compañero con una misión especial y con poder en la cultura de la clase. El profesor, por tanto, tiene que tener un cuidado especial sobre la riqueza de la cultura de la clase -riqueza en ofrecimientos, desafíos, alternativas, y modelos, incluyendo el lenguaje" (Bauersfeld, 1995, p. 283)

REFERENCIAS

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. En T. Coony y D. Grows (Eds.), *Effective Mathematics Teaching* (p. 27-46). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics/ Erlbaum.

Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. En R. Biehler; R. Scholz; R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 133-146). Dordrecht, NL: Kluwer Academic Pb.

Bauersfeld, H. (1995-a). "Language Games" in the mathematics classroom: their function and their effects. En Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.). *The Emergence of Mmeaning: Interaction in Class-room Cultures* (pp.271-292). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Bauersfeld, H. (1995-b).The structuring of the structures: Development and function of mathemathizing as a social practice. En L. Steffe y J. Gale (Eds.). *Constructivism in Education*. (pp. 137-158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Pub.

Bauersfeld, H., Krummheuer, G. y Voigt, J. (1988). Interactional theory of learning and teaching mathematics and related microethnographical studies.En H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds.). *Foundations and Methodology of the Discipline Mathematics Educatíon (Didactics of Mathematics)* (pp. 174-168). Antwerp: Proccedings of the 2nd TME-Conference. University of Antwerp.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspective and method.* Englewood Cliffs, NJ.:Prentice-Hall. [El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1982].

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7* (2): 33-115.

Brown, J. S., Collins, A. Y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, January-February: 32-42.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas; el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE Universidad Autónoma/Horsori.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures.* Hillsdale, N.J.:Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Escudero, I. & Sanchez, V. (1999) The relationships between professional knowledge and teaching practice: the case of similarity. *Proceedings of the PME-23, Haifa, Israel*.

Gergen, K. J. (1995). Social construction and the educational process. En, L. P. Steffe y J. Gale (Eds). *Constructivism in Education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Pub.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 14* (3): 325-355. [Recuperable en URL: http://www.ugr.es/loca/jgodino/articulesp.htm].

Godino, J. D. y Batanero, C. (1999). Funciones semióticas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), *IX Seminário de Investigaçao en Educaçao Matematica*. Viana do Castelo: Associaçao de Profesores de Matematica. [Recuperable en URL: http://www.ugr.es/loca/jgodino/articulesp.htm].

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripherical participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

McClain, K. y Cobb, P. (1997). *An analysis of the teacher's role in guiding the evolution of sociomathematical norms.* Vanderbilt University.

Seeger, F. (1991). Interaction and knowledge in mathematics education. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*,11 (3): 125-166.

Sierpinska, A. (1996). Whither mathematics education?. En C. Alsina et al. (Eds.), *Acta del 8º Congreso International de Educación Matemática* (pp. 21-46). Sevilla: Sociedad Thales.

Sierpinska, A. (1997).Formats of interaction and model readers. *For the Learning of Mathematics*, 17, 2: 3-11.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemology of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop et al. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, NL: Kluwer, Academic Publ.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics,* 32: 49-92.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique*

des Mathématiques, 6 (1): 69-118.
Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26: 275-298.
Voigt, J.(1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.). (pp. 163-199).
Voigt, J. (1996). Negotiation of mathematical meaning in classroom processes: Social interaction and learning mathematics. En L. Steffe; P. Nesher; P. Cobb; G. Goldin & B. Greer (Eds.) *Theories of Mathematical Learning* (pp. 21-50). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Pub.
Wood, T. (1994) Patterns of interaction and the culture of the mathematics classroom. En S. Lerman (Ed.). *Culture Perspectives on the Mathematics Classroom* (pp.149-168). Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publ.
Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4): 458-477.