

# REFLEXIONES ACERCA DE LOS OBSTÁCULOS QUE APARECEN, EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS, AL PASAR DEL BACHILLERATO A LA UNIVERSIDAD

Mariano Jiménez<sup>1</sup> y Arantxa Areizaga<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Economía Aplicada I

Universidad del País Vasco

<sup>2</sup>Instituto de Bachillerato Koldo Mitxelena

Rentería. Guipuzcoa

## Resumen:

---

Para afrontar las dificultades que se presentan en el paso del Bachillerato a la Universidad es conveniente tener en cuenta dos aspectos: la evolución psicológica de los alumnos y sus conocimientos previos.

Al pasar del Bachillerato a la Universidad se produce un cambio de una matemática “mostrativa” a una matemática “demostrativa”, lo que puede constituir una fuente importante de dificultades para aquellos alumnos cuyo pensamiento no ha alcanzado plenamente la etapa formal.

Los programas de las asignaturas de matemáticas en los Nuevos Bachilleratos han cambiado. A veces los profesores universitarios no estamos lo suficientemente al tanto de ello. Esto es muy importante, pues la introducción de un nuevo tema puede necesitar unos conocimientos previos que los alumnos no poseen. En el caso de los estudios de Economía y Empresa debemos tener especial cuidado, pues a nuestras aulas acceden alumnos de distintas modalidades de bachillerato y por lo tanto con diversa formación matemática. En el epígrafe 3 hacemos un breve repaso de los principales conceptos que se imparten en primer curso de nuestras facultades y escuelas universitarias, haciendo referencia a la formación previa que sobre ellos tienen nuestros alumnos.

---

**Palabras clave:** enseñanza de las matemáticas, conocimientos previos, desarrollo psicológico, paso del bachillerato a la universidad.

## 1 INTRODUCCIÓN

Una enseñanza fundamentalmente expositiva, como la que se desarrolla en la universidad española, sólo puede resultar apropiada si se tienen en cuenta los conocimientos previos, y se establece una relación coherente entre lo que los alumnos saben y los nuevos conocimientos. A este respecto pueden presentarse dos problemas [Macnab y Cummine (1986), p.17]:

1. Un nuevo tema introducido en la universidad puede ser una repetición de uno ya visto en la enseñanza secundaria.
2. La introducción de un nuevo tema puede necesitar unos conocimientos previos que los alumnos no poseen de secundaria. Esto motivará dificultades innecesarias y falta de confianza de los alumnos para afrontar la enseñanza universitaria.

Por ello es conveniente que los profesores de los primeros cursos universitarios posean un conocimiento detallado del trabajo realizado durante la educación secundaria.

La gran mayoría de los alumnos que accedan a los estudios universitarios de Ciencias Económicas y Empresariales habrán cursado las siguientes asignaturas de matemáticas:

- Los que procedan de la opción universitaria *Científico-Técnica*: Matemáticas I y Matemáticas II
- Los que procedan de la opción universitaria de *Ciencias Sociales*: Matemáticas para las Ciencias Sociales I y Matemáticas para las Ciencias Sociales II.

Los programas de estas asignaturas, así como la profundidad con que se imparten los diversos temas, difieren bastante. Lo que hace que a nuestras aulas accedan alumnos de diversa formación matemática, de manera que no es raro que haya temas que la mitad de la clase domina bastante bien, mientras que la otra mitad los desconoce o los ha visto muy superficialmente. En general los que proceden de la opción Científico-Técnica tienen una mejor base para estudiar las asignaturas de matemáticas de primer curso universitario, aunque a cambio los que proceden de la opción de Ciencias Sociales tienen una mejor formación en Estadística y en otras asignaturas que son propias de su bachillerato, tales como Economía o Contabilidad.

Los contenidos de los programas de estas asignaturas de bachillerato tiene que ser tenidos muy en cuenta, a la hora de elaborar los programas y de especificar en qué apartados debemos demorarnos más por ser novedosos y cuales deben ser estudiados con menos detenimiento por haber sido ya vistos por los alumnos durante el Bachillerato, aunque ahora, al enmarcarlos en un desarrollo más general, sea preciso recordarlos para reubicarlos convenientemente, y para enfocarlos de forma más acorde con la evolución psicológica experimentada por nuestros alumnos, desde sus años de enseñanza media hasta su incorporación a la universidad. Sobre esto último nos extendemos un poco más a continuación.

## 2 NIVEL DE DESARROLLO PSICOLÓGICO DE LOS ALUMNOS

El lógico y psicólogo Jean Piaget (1979) ha demostrado, estudiando el desarrollo mental del niño, que las estructuras madres de la matemática según Bourbaki: algebraicas, de orden y topológicas, se corresponden con el funcionamiento natural de la inteligencia. Si, de acuerdo con las investigaciones de Piaget, las conexiones matemáticas son engendradas por la actividad de la inteligencia, se entiende que el nivel de desarrollo psicológico del alumnado sea muy importante a la hora de plantearse tanto los contenidos como el enfoque y profundidad con que deben enseñarse tales contenidos

Los alumnos que inician los estudios universitarios tienen por los menos 18 años. A esta edad se encuentran en la etapa de las "operaciones formales" según la clasificación de Piaget. Dicha etapa se caracteriza por presentar los siguientes aspectos [Bybee y Sund (1985)]:

- i) *Abstracción reflexiva*: habilidad para razonar sin referencia a una experiencia concreta.
- ii) *Pensamiento proposicional*: habilidad para pensar teóricamente en las consecuencias de los cambios sufridos por los objetos y acontecimientos.
- iii) *Lógica combinatoria*: habilidad para razonar acerca de las combinaciones de variables en un problema.
- iv) *Razonamiento inductivo*: construcción de modelos generales a partir de ejemplos particulares.

- v) *Razonamiento deductivo*: razonamiento a partir de proposiciones generales hasta las conclusiones particulares.

El pensamiento de un niño evoluciona desde la etapa operacional concreta hasta las operaciones formales. El pensamiento operacional concreto es el característico de un niño de 10 años, aunque hay individuos en los que se extiende hasta la adolescencia y aún más allá. Se basa en la manipulación y consideración de materiales físicos y contempla únicamente operaciones con resultado inmediato.

Los alumnos de bachillerato, están inmersos en ese proceso evolutivo y sólo en algunos casos alcanzan el nivel de razonamiento formal antes de acceder a la Universidad. Por ello al plantearnos los contenidos debemos considerar que puede ser interesante volver a estudiar algunos conceptos que se hayan visto en bachillerato, para darles un tratamiento formal, y más adecuado al nivel psicológico de un alumno universitario:

*"La adquisición por parte del estudiante de algunos conceptos matemáticos es un proceso lento cuyo aprendizaje se debe extender a lo largo de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato para pasar a la formalización en la Enseñanza Universitaria", [Turégano (1997)].*

Además según Bruner (1964) las diversas etapas cognoscitivas se presentan en el desarrollo de cada tema nuevo en matemáticas tanto en el niño pequeño como en el mayor, de forma que la etapa concreta puede serle necesaria todavía al mayor.

De hecho, una fuente importante de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, en los primeros cursos universitarios, es el choque que se produce, en aquellos alumnos cuyo pensamiento no ha alcanzado plenamente la etapa formal, al tener que afrontar operaciones formales. A este respecto René Thom (1978, p. 142) escribe lo siguiente:

*"... a pesar de los progresos de nuestra civilización técnica, las etapas de desarrollo físico e intelectual del niño siguen siendo las mismas: sigue habiendo una fase necesaria de aprendizaje y unas limitaciones genéticas que hay que respetar para aprender a andar, a hablar, a leer y a escribir, y no parece que los avances de la psicología hayan permitido modificar lo más mínimo el calendario que rige la adquisición de conocimientos. Podríamos preguntarnos si no existen limitaciones del*

*mismo tipo en lo que se refiere al aprendizaje de las matemáticas...Yo, personalmente, creo que estas limitaciones genéticas existen, que forman parte integrante del temperamento y de la personalidad del alumno, y que en la mayoría de ellos son de tal naturaleza que les impide por completo la comprensión de las matemáticas al nivel de los rudimentos del cálculo diferencial, que es justamente donde debería haberse llegado antes de entrar en la enseñanza superior”.*

Además, debido a esta supuesta madurez del alumno universitario, en el paso del bachillerato a la universidad se produce un cambio en lo que Josep Gascón (1997) llama el *contrato didáctico*:

*"... se pasa de una matemática "mostrativa" a una matemática "demostrativa".  
"... se pasa de una fuerte preponderancia de los "problemas por resolver" a una importante presencia de los "problemas por demostrar" en la universidad.  
... el estudiante pasa de ser un alumno con escasa autonomía, a ser un estudiante (co)responsable de su proceso de estudio".*

Es decir que en el paso de la Secundaria a la Universidad se producen lo que Piaget y García (1982, p. 234) llaman *obstáculos psicogénicos*, que algunos alumnos tendrán dificultad en superar.

Creemos que todas estas consideraciones deben ser tenidas muy en cuenta a la hora de diseñar las estrategias de aprendizaje en el aula.

### **3 CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS ADQUIRIDOS EN BACHILLERATO, CONTEMPLADOS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE PRIMER CURSO UNIVERSITARIO.**

Después de las consideraciones hechas anteriormente vamos a intentar concretar, a la vista de los programas y la experiencia de diversos profesores de bachillerato con los que hemos hablado, cuales son las principales lagunas de conocimiento que se pueden producir al pasar a la Universidad, pues a veces los profesores universitarios no estamos al tanto de los cambios que se van produciendo en el currículo de Bachillerato, y tenemos cierta tendencia a pensar que los alumnos llegan sabiendo las mismas cosas que en su día nos enseñaron a nosotros.

De manera general podríamos decir que el nivel del alumnado que llega al Nuevo Bachillerato es inferior al que tenían cuando estaba en vigor el BUP. El motivo más inmediato de esto es que han disminuido las horas de Matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (etapa de 12 a 16 años). Esto hace que en los dos años de Bachillerato deba emplearse un esfuerzo considerable en intentar corregir defectos básicos de formación. Por otra parte los objetivos son los mismos, con lo que se produce un desajuste entre la cantidad de contenidos conceptuales y procedimentales a impartir y el tiempo disponible para ello. El resultado es que una mayoría del alumnado no los asimila, e incluso que haya temas que se ven al final deprisa y corriendo.

Recordemos otra vez que en los nuevos bachilleratos han aumentado considerablemente los temas dedicados a Probabilidad y Estadística, sobre todo en el de Ciencias Sociales, lo que inevitablemente redundará en un debilitamiento de otros temas clásicos como Cálculo Diferencial e Integral y Geometría. Es precisamente en estos temas en los que notaremos una mayor diferencia de formación en los alumnos que acceden a nuestros estudios universitarios, según procedan de la opción Científico-Técnica o de la de Ciencias Sociales

Por otra parte en los Nuevos Bachilleratos se trabaja más en que el alumno aprenda a expresar lo que hace, es decir a que verbalice el proceso de razonamiento. Otro aspecto interesante es que se insiste más en la resolución de problemas frente a la resolución de meros ejercicios de cálculo mecánico.

Es decir que en líneas generales podríamos decir que la formación básica de nuestros alumnos ha bajado, pero no tanto como tendemos a pensar los profesores universitarios, ya que en buena medida lo que ocurre es que saben “otras cosas”, distintas de las que algunos de nosotros, poco al tanto de los cambios introducidos en Bachillerato, esperamos que sepan.

Una consideración que enseguida nos hacen los profesores de bachillerato es que tengamos cuidado al introducir el lenguaje y los símbolos formales de la matemática, ya que en general en bachillerato no se ven, por lo que deben ser introducidos pausadamente y explicando su significado, esto es algo que realmente no cuesta mucho, pero cuyo descuido puede conducir a que muchos alumnos deserten de la asignatura a las primeras de cambio.

Para que el proceso de enseñanza y aprendizaje funcione adecuadamente es fundamental que los alumnos no se encuentren con terminología, símbolos, y conceptos que desconocen pero que sin embargo son utilizados sin previa introducción, como si debieran poseerlos por ciencia infusa.

Otro asunto importante que debemos tener en cuenta es que, como ya hemos comentado un poco más arriba, ahora en bachillerato se estudia menos geometría que cuando muchos de nosotros lo cursamos, sobre todo en lo que concierne al bachillerato de Ciencias Sociales, cuyos alumnos no ven prácticamente nada de geometría. Tan sólo conocen la representación gráfica de una recta en el plano. Se da el caso de que no entienden expresiones de uso corriente tales como: “lugar geométrico de los puntos ...”. Tampoco han estudiado cónicas por lo que desconocen la ecuación de la circunferencia y la elipse, aunque sí que han visto la ecuación de la parábola y de la hipérbola a través del estudio y representación de curvas explícitas.

En el campo del **Álgebra Lineal**, cabe hacer las siguientes consideraciones:

- Se ha eliminado del currículo de los nuevos Bachilleratos LOGSE toda referencia a lo que tradicionalmente se ha venido llamando matemática moderna, como operaciones con conjuntos y relaciones binarias y sus propiedades, por considerarse que el nivel psicológico de los jóvenes de esa edad no es el adecuado para asimilarlos.
- Los alumnos desconocen por completo la noción de estructura. Lo que hace que debemos tener especial cuidado al introducir la noción de espacio vectorial, pues en muchos casos es la primera estructura abstracta con la que se enfrentan. Sobre todo si tenemos en cuenta que la noción geométrica de vector tan sólo la conocen los de la opción Científico-Técnica.
- La noción de dependencia e independencia lineal la conocen sólo de una manera indirecta, a través del estudio de los sistemas de ecuaciones o de los determinantes y las matrices.
- Las matrices y las operaciones con matrices las conocen bastante bien. Aunque no es raro encontrarse con alumnos de la opción de Ciencias Sociales que sólo saben

calcular la matriz inversa por el método de Gauss, desconociendo el método de los adjuntos.

- En cuanto al cálculo de determinantes es frecuente que los alumnos de Ciencias Sociales tan sólo sepan calcular hasta el orden 3 por la regla de Sarrus, desconociendo el cálculo por el desarrollo de los elementos de una línea.
- La noción de rango de una matriz es conocida, pero en general los de Ciencias Sociales la han trabajado poco y en muchos casos la tienen prácticamente olvidada.
- En cuanto a los sistemas de ecuaciones lineales, todos han visto su resolución por el método de Gauss. Sin embargo es frecuente que los alumnos de Ciencias Sociales desconozcan el método de Cramer y el teorema de Rouché-Frobenius. El estudio de sistemas con parámetros sólo lo han visto los de la opción Científico-Técnica.

Si nos referimos al **cálculo diferencial e integral**, conviene tener en cuenta lo siguiente:

- Es en esta parte donde quizás encontremos una mayor diferencia de nivel entre los procedentes de la opción Científico-Técnica y los de Ciencias Sociales. Baste decir que mientras los primeros tienen asignados dos bloques temáticos en su temario los segundos sólo tienen uno.
- De manera general podemos decir que, como mucho, conocen la mecánica de los algoritmos de cálculo pero no han asimilado los conceptos, ya que como hemos comentado en el epígrafe 2, es raro que, durante el bachillerato, alcancen la etapa de razonamiento formal en su desarrollo psicológico.
- Es conveniente hacer un repaso de algunas funciones trascendentes fundamentales, tales como la logarítmica, la exponencial o las trigonométricas, antes de empezar a manejarlas, ya que en particular los que proceden de Ciencias Sociales tienen un conocimiento muy superficial de las mismas.
- Del concepto de límite pueden tener una idea intuitiva. En cuanto a su cálculo, los de Ciencias Sociales desconocen la regla de L'Hôpital, y es dudoso que conozcan algo sobre las operaciones con límites.

- Ninguno ha visto el concepto de función diferenciable. Por lo tanto antes de introducir dicho concepto para varias variables es imprescindible detenerse en el caso de una variable.
- Los que proceden de Ciencias Sociales, es muy probable que no tengan clara la relación entre continuidad y derivabilidad.
- En ninguno de los Bachilleratos se ve el concepto de función implícita, salvo el ejemplo concreto de la ecuación general de una recta.
- Tampoco han visto nada acerca de la aproximación lineal de una función ni por supuesto de los desarrollos de Taylor.
- Los de la opción Científico-Técnica han estudiado los teoremas de Rolle y del valor medio, pero los de Ciencias Sociales no.
- Conocen el cálculo de óptimos locales de una función de una variable, aunque para las condiciones de segundo orden sólo saben trabajar con la derivada segunda.
- En cuanto a la optimización condicionada, los de la opción de Ciencias Sociales parten con cierta ventaja puesto que han estudiado en bachillerato la programación lineal, aunque sólo desde el punto de vista gráfico.
- En el caso de la integración, todos han visto el cuadro de integrales inmediatas, cambios de variables sencillos (muy pocos los de C. Sociales), integración por partes y algo de integración de funciones racionales (esto último los de C. Sociales casi de manera testimonial)

#### **4 CONCLUSIONES**

Para afrontar los obstáculos que aparecen, en la enseñanza de las matemáticas, al pasar del Bachillerato a la Universidad, creemos muy adecuado que los profesores de los primeros cursos universitarios posean un conocimiento detallado del trabajo realizado durante la educación secundaria. La mejor manera de lograr esto es el contacto personal con profesores que impartan dicha etapa educativa, por ello sería conveniente institucionalizar reuniones entre profesores universitarios y de secundaria, en las que se

trate de coordinar la enseñanza de las matemáticas en ambos niveles educativos. Pensamos que la figura idónea para realizar esta tarea podría ser el Coordinador de las Pruebas de Selectividad, si su labor se amplía al mantenimiento de contactos y reuniones no solo con profesores de secundaria, sino también con profesores universitarios.

## 5 REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

BRUNER, J.S. (1964): "The course of cognitive growth". *American Psychologist* 19, pp. 1-15. (Citado por D.S. Macnab y J.A. Cummine. (1986). Op. cit. p. 53)

BYBEE, R.W. and SUND, R.B. (1985). Piaget for Educators. Ed. Charles E. Merrill (Citado por D.S. Macnab y J.A. Cummine. (1986). Op. cit. p. 40)

GASCÓN, J. (1997): "Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad". *SUMA* 26 pp. 11-21.

MACNAB, D.S. and CUMMINE, J.A. (1986): La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16. Ed. Visor. Madrid.

PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1982): Psicogénesis e historia de la ciencia. Ed. Siglo XXI (4ª edición, México DF.

PIAGET, J. (1979): "Los datos genéticos". En: Tratado de Lógica y conocimiento científico. Tomo III-epistemología de la matemática. Ed. Paidós. Buenos Aires.

THOM, R. (1978): "Matemáticas modernas y matemáticas de siempre". En: La enseñanza de las matemáticas modernas. Ed. Alianza. Madrid.

TURÉGANO, P. (1997): "El aprendizaje del concepto de integral". *Suma*. 26, pp. 39-52.